目　录

第一章　走上成功之路

希尔伯特是20世纪上半叶最杰出的数学大师之一。他的工作涉及到数论、代数学、几何学、分析学、积分方程、数学基础，以及理论物理学等众多的研究领域，他以其创造性的科学成果和特有的科学精神深刻影响着他那个时代数学的发展，并且在某种程度上至今还影响着数学家们的工作。现代著名数理逻辑学家塔尔斯基（A. Tarski，1909～1983）在评价希尔伯特的工作时指出："未来的数学史家在研究19世纪和20世纪前半叶的数学发展时，会毫不怀疑地声明：那个时期好几个数学分支趋于严格化的发展，都极大地受惠于希尔伯特的成就。……另一方面，数学史家必然会注意到——也许还带着几分惊讶，希尔伯特在一些自己并不曾取得十分重要结果的领域内，同样发挥了巨大的影响力。"象希尔伯特这样具有世界影响的杰出数学大师，在数学史上是罕见的。

希尔伯特是科学探索征途上成功者的楷模。他的成才历史以及他的科学生涯，在很多方面可作为杰出科学人才走上成功之路的缩影。那么，希尔伯特是怎样走上成功之路的？又是怎样完成由潜才到显才的过渡的？

§1　良好的社会环境

"每一个社会时代都需要有自己伟大的人物，如果没有这

样的人物，它就要创造出来。”① 作为一名数学家，希尔伯特是在19世纪后半叶走上科学探索的成功之路的。当时，德国已成为世界科学活动的中心。德国的科学盛世，为他由潜才向显才的过渡提供了良好的社会环境。

一　世界数学中心向德国的转移

在世界范围内各国的科学发展是不平衡的，这种不平衡性的宏观表现就是存在着世界科学活动的中心，而且这个中心并不是总停留在某一个国家，而是随着历史的发展，从一个国家转移到另一个国家。纵观近代科学以来的历史，在社会生产、社会变革、思想解放运动等诸因素的影响和作用下，世界科学活动的中心曾相继停留在几个不同的国家。其转移的格局大体上是：意大利→英国→法国→德国→美国。从中心区停留的时间跨度看：

意大利（1540～1610年）
英　国（1660～1730年）
法　国（1770～1830年）
德　国（1810～1920年）
美　国（1920～　　　）

历史表明，科学活动中心的转移，实际上就是科学人才中心的转移。处于世界科学活动中心的国家，同时也处于世界科学人才的中心，处于科学人才发展的盛世时期。就数学来说，一个国家和民族一旦成为世界科学活动的中心区，这个国家和民族就会数学人才辈出。

---

①《马克思恩格斯选集》第一卷，第450页。

事实上，欧洲的文艺复兴运动带来了意大利科学的春天，意大利成为近代科学活动的第一个中心。继多才多艺的天才达·芬奇（L. da Vinci, 1452～1519）之后，近代科学的先驱者伽利略（Galilei, 1564～1642）在这个科学活动中心区应时而生，他使16世纪后半叶的欧洲唤发出新的科学精神。在这个时期，意大利产生出一大批杰出的数学家。著名的有：塔尔塔利亚（N. Tartaglia, 1500～1557）、卡当（G. Cardano, 1501～1576）、科曼地诺（F. Commandino, 1509～1575）、费拉里（L. Ferrari, 1522～1565）、邦别利（R. Bombelli, 1526～1572）、卡瓦列利（B. CaValieri, 1578～1647），等等。

17世纪英国的资产阶级革命迎来了第二个科学活动中心。在这个中心区，英国造就了以近代科学奠基人牛顿（I. Newton, 1642～1727）为代表的一大批杰出的数学家，就微积分这一数学领域而言，在这个时期作出重大贡献的除了牛顿，还有华利斯（J. Wallis, 1616～1703）、巴罗（I. Barrow, 1630～1677）、泰勒（B. Taylor, 1685～1731）和马克劳林（C. Maclaurin, 1698～1746）等著名数学家。

18世纪法国的资产阶级大革命引来了法国科学的繁荣，巴黎成为当时世界学术交流的中心。在良好的学术环境中，法国的数学人才群星般出现，著名的有拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736～1813）、蒙日（G. Monge, 1746～1818）、拉普拉斯（P. S. Laplace, 1749～1827）、勒让德（A. M. Legendre, 1752～1833）、卡诺（L. N. M. Carnot, 1753～1823）、富立叶（B. J. Fourier, 1768～1830）、杜班（P. C. F. Dupin, 1784～1873）、彭色列（J. V. Poncelet, 1788～1867）、柯西（B. A. L. Cauchy, 1789～1857）、拉

梅（G. Lame，1795～1870）、伽罗华（E. Galois，1811～1832）等人。其取得的成果占当时世界重大数学成果总数的一半以上。

德国科学技术的起步比英国和法国都要晚，但在法国自1830年7月革命后科学技术发展开始走向相对低潮的时候，德国的经济和社会变革却使她的科学技术迅速崛起，并很快超过了英国和法国。

德国在18世纪末和19世纪初期比英国和法国都落后，以手工业生产为主，几乎没有大工业，封建生产关系仍然占居统治地位，无论在经济上或政治上都很分散，没有形成一个统一的国家。它的资产阶级很弱小，不敢用革命手段来解决资本主义与封建主义之间的矛盾。封建制度和贵族的特权严重阻碍着德国资本主义的兴起。1834年1月，德意志关税同盟的实现，统一的商品市场的形成，为德国发展工业资本主义奠定了广泛而良好的基础。1848年3月革命以后，开始了德意志的资本主义发展时代。1871年统一战争的胜利，标志着近代德国已跻身于资本主义强国之列。在这一社会变革时期，德国政府为了发展工业资本主义，采取了一系列改革措施，包括迅速普及蒸汽机的应用，以发展铁路为基础的重工业，建立行业内的联合企业和行业间的综合联合企业，保护农业和工商业等。这样，在60年代，终于使德国的经济实力赶上并超过了先进的英国和法国。

在科学研究方面，德国开创了国立科学研究所的科研体制，建立了各种专业的国立研究所，并由国家在预算中正式拨款作为研究经费。这就使科学研究中出现了固定的正规训练和专门职业，使科学工作变得专业化了。在这种科研体制出现之前，人们只能把科学研究作为一种业余活动，而且个人要承担

全部的研究费用。与此同时进行的是整顿和改革教育体制。自1809年建立了柏林大学，一种新型的高等教育体制逐渐形成，自然科学在高等学校由原来的附庸地位上升到应有的地位。在高等学校中，教学和科研得到了很好的结合。从19世纪中叶开始，某些德国大学的实验室开始成为科学研究的中心，有的实际上已成为国际科学研究的活动中心。这些研究中心不仅为德国培养着新一代的科学家，而且把世界各地最有才华的青年学生吸引到这里。就这样，资本主义在德国的迅猛发展，科学技术在德国社会生活中地位的显著提高，极大地推进了德国科学技术的发展，使德国继法国之后逐渐成为世界科学活动的中心，成为19世纪产生杰出科学人才的肥沃土壤。

就数学而言，首先是“欧洲数学之王”高斯（K. F. Gauss，1777～1855）的堂堂雄姿，出现在19世纪世界数学史的地平线上。高斯所开创的哥廷根大学的科学传统，经狄里克莱、黎曼、克莱因之手，后来在希尔伯特时代得到了充分的发扬。

随着高斯的出现，数学的花朵从法国逐渐移植到了德国。在这个科学活动中心区，仅由德国数学家作出的重大成果，就占当时世界重大数学成果总数的42%以上。除了高斯和希尔伯特，在这个时期值得提出的杰出数学家还有：麦比乌斯（A. F. Möbius，1790～1868）：拓扑学，提出有名的“麦比乌斯带”；斯太纳（J. steiner，1796～1863）：射影几何学；古德曼（C. Gudermann，1798～1852）：函数论，推广函数的幂级数表示法；斯陶特（K. G. C. VonStaudt，1798～1867）：射影几何学；普吕克（J. Plücker，1801～1868）：解析几何，建立广义等同坐标和正切坐标；雅可比（K. G. J. Jacobi，1804～1851）：椭圆函数论，数论，线性代数，

变分学和微分方程论；狄里克莱（P. G. L. Dirichlet,1805～1859）：解析数论，数学分析和位势理论；里斯丁（J. B. Listing, 1808～1882）：拓扑学，提出单侧曲面；格拉斯曼（H. G. Grassmann, 1809～1877）：多维欧几里得空间理论，引出矢量的数量积概念；库麦尔（E. E. Kummer, 1810～1895）：理想数论；外尔斯特拉斯（K. T. W. Weierstrass, 1815～1897）：实数理论，数学分析，解析函数论，变分学，微分几何和线性代数；海涅（H. E. Heine, 1821～1881）：集合论，提出著名的"有限覆盖定理"；克隆尼克（L. Kronecker, 1823～1891）：数论和椭圆函数论，提出有名的"克隆尼克代数乘积"；黎曼（G. F. Riemann, 1826～1866）：黎曼几何学，数学分析，复变函数论和数论，提出著名的"黎曼猜想"；代德金（J. W. R. Dedekind, 1831～1916）：代数学，提出算术公理的完整系统；果尔丹（P. Gordan, 1837～1912）：代数不变量理论；韦伯（H. Weber, 1842～1913）：函数论，建立有名的韦伯函数；施瓦尔茨（H. A. Schwarz, 1843～1921）：微分方程论，提出有重要应用的施瓦尔茨函数；康托尔（G. F. L. P. Cantor, 1845～1928）：集合论和实数理论；弗雷格（G. Frege,1848～1925）：数理逻辑；克莱因（C. F. Klein, 1849～1925）：代数方程论，椭圆函数论，自守函数论，连续群论和非欧几何，提出著名的《爱尔朗根纲领》；林德曼（F. Lindemann, 1852～1939）：函数论，证明π的超越性；龙格（C. Runge, 1856～1927）：解析函数的多项式逼近理论，现代计算数学的先驱者；赫尔维茨（A. Hurwitz, 1859～1919）：线性结合代数；豪斯道夫（F, Hausdorff, 1868～1942）：集合论，拓

扑学，泛函分析和数论，建立多维空间的度量理论，称为豪斯道夫度量；闵可夫斯基（H. Minkowski, 1864～1909）：提出四维几何公式，为爱因斯坦建立相对论提供了重要数学工具；兰道（E. Landau, 1877～1938）：解析数论；诺德（E. Noether, 1882～1935）：抽象代数；外尔（H. Weyl, 1885～1955）：黎曼曲面理论，积分方程论，联络空间微分几何学和群表示论；柯朗（R. Courant, 1888～1972）：复变函数论，偏微分方程论和应用数学，等等。

希尔伯特的青少年时代就是在数学的花朵已从法国被移植到德国，德国数学人才辈出的科学背景中渡过的。1862年他诞生的那一年，“欧洲数学之王”高斯已经去世7年。德国数学界需要代表新时代精神的领头人，这个艰巨而光荣的使命，最终就历史地落在了希尔伯特的肩上。

二　哥尼斯堡的文化传统

任何一个民族、地区都有自己的文化传统。如果一个民族、地区具有尊重科学、重视教育的社会风尚，那就自然有利于科学人才的产生和发展。希尔伯特青少年时代渡过的哥尼斯堡，就是一座具有优良文化传统的古城。

哥尼斯堡建立于13世纪中叶，东普鲁士的首府曾设在这里，使它成为东普鲁士的行政和文化中心。它位于普累格尔河的两条支流之间，这两条河汇合后流入波罗的海。这是一座幽静秀丽的古城，它的文化传统与好几位著名科学家的名字联系着。

对哥尼斯堡的文化传统产生重大影响的第一位伟大学者，首推著名天文学家、哲学家康德（I. Kant, 1724～1804）。康德及其科学思想，对希尔伯特的成才以及后来的工作有过深

刻的影响，尤其是希尔伯特的数学基础论思想，在许多方面可直接或间接地追溯到康德那里。

康德的父亲是个马鞍匠，母亲是一位才华出众和笃诚的虔信派的教徒。康德在七兄妹中排行第四，长的瘦弱单薄。康德幼时家境十分贫苦，在亲朋的资助下，康德勉强读完了中学和大学。哥尼斯堡大学毕业后，他原打算作一名牧师，但很快就打消了从事神职的愿望，选择了教师职业。1747～1755年，在担任家庭教师期间，他就开始了自己的科学生涯。

此时，他阅读了大量的科学书籍，在无人指导和帮助的情况下，进行了不懈的科学研究。经过8年的努力，他终于在学术上形成了自己的独到见解。康德在科学上的第一项重大贡献，也是最重要的贡献，是把牛顿的关于太阳系起源的神的第一次推动，变为物质运动发展的自然历史过程。1754年，他发表了“论地球自转是否变化和地球是否要衰老”的论文，对“宇宙不变论”大胆提出了怀疑。1755年，他发表了名著《自然通史和天体论》。

在这部著作中，他首次提出了历史上关于太阳系起源的星云假说。在他之前，牛顿曾运用万有引力定律解释了行星的轨道，但是牛顿却把行星的运动归结为上帝的第一次推动。康德认为，太阳系内的各个天体是由原始星云凝聚而成的。原始星云是由充满广大空间的各种运动状态的微粒组成的。由于万有引力的作用，微粒互相接近，逐渐形成团块，较大的团块成为引力中心。中心体不断吸引周围的微粒和小团块而变大，最后聚集成为太阳。同时，有些微粒在向中心体降落过程中，因相互碰撞向旁偏转而围绕中心体作圆周运动。于是，这些微粒又各自形成小的引力中心，最后聚集成为行星，康德的学说不仅

提出了太阳系的起源问题，而且在哲学上具有重要意义。恩格斯曾给予高度评价：“在这个僵化的自然观上打开第一个缺口的，不是一个自然科学家，而是一个哲学家，1775年出现了康德的《自然通史和天体论》。关于第一次推动的问题被取消了；地球和整个太阳系表现为某种在时间的进程中逐渐生成的东西。”①“康德关于目前所有的天体都从旋转的星云团产生的学说，是从哥白尼以来天文学取得的最大进步。……康德在这个完全适合于形而上学思维方式的观念上打开了第一个缺口，而且用的是很科学的方法，以致他所使用的大多数论据，直到现在还有效。”②

康德的星云说一提出，就引起了学术界的重视。在《自然通史和天体论》问世的当年，康德就被聘为母校哥尼斯堡大学的收费讲师。当时的德国非常重视保证任命学术职位的高质量，学术任命的必要条件是取得大学授课资格。那些得到了大学授课资格的人，即使没有被正式任命为教授职务，也有在大学讲课的权利，但是他们不拿大学的薪金，仅仅收取选他们课的学生们的听课费，因此也称为“无薪讲师”。康德担任收费讲师达15年之久，1770年，才被正式任命为逻辑学和哲学教授。康德是德国古典唯心主义的创始人。从1770年任命为教授起，他就着手构造自己的哲学体系。经过12年的努力，1781年他的巨著《纯粹理性批判》问世。这部艰深难懂的著作集中体现了康德的哲学思想，对近代哲学和科学产生很深的影响。康德主张在人们意识之外，存在“自在之物”，但又断言“自在之物”是根本不可认识的。他提出有名的“二律背反”，即两

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第12页。
② 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1971年版，第54页。

个互相排斥但同样是可以论证的命题之间的矛盾。列宁指出："康德哲学的基本特征是企图调和唯物主义和唯心主义，使二者妥协，使各种相互对立的哲学派别结合在一个体系中。"① 康德哲学反映了18世纪下半叶德国资产阶级的两面性和妥协性。

康德一生博览群书，兴趣十分广泛，他在执教期间，既教哲学又教逻辑学、数学、物理学、地理学、人类学和教育学等课程。他的数学哲学思想具体体现了他在认识论上的先验观点。他有这样的论点，人的观念不是后天的，而是先验的。人的先天感性直观形式有两种：时间和空间。数的概念来自于用先天的时间观念整理关于事物多少的经验；几何学的概念则是通过用先天的空间观念整理关于事物形状的经验的结果。他认为："空间是一个必然的、先天的观念，它是一切外部直观的基础。""几何学是一门科学，这门科学综合地而又先天地决定空间的性质。"他宣称各种数学命题都是"先天综合判断"。总之，在康德看来，数学是人靠先天的直观通过总结经验创造出来的。他引证逻辑、算术和几何学中最基本的概念作为先验知识的例子。

康德的数学哲学思想，在19世纪一部分数学家中产生深刻影响，在很大程度上对数学特别是几何学的发展起了阻碍作用。19世纪上半叶非欧几何的发现，使人们对康德的观点产生了怀疑。高斯曾指出，几何学的公理和定理就不是来自先天的直观，而是来自人们的经验，但他仍然同意康德关于算术概念的先验观点。正是由于康德哲学观念的流行，高斯虽然最早发现了非欧几何，但他害怕这一发现会引起"愚人的喊叫"，而

① 《列宁全集》第14卷，第203页。

在生前一直没有公开发表这方面的研究成果。康德的数学先验观对希尔伯特的早期数学思想也曾有过影响。在大学博士论文答辩中，希尔伯特选来答辩的二个论题，其中一个论题就涉及到康德的数学哲学思想。当时，希尔伯特反对康德关于几何判断的先验观点，却支持康德关于算术判断具有先验性质的理论。

康德在世时就享有盛名，关于他的生活和为人，在哥尼斯堡居民中广泛流传着许多佳话。他喜欢与漂亮的年轻女郎交际，但他从来没有结婚，他把哲学作为自己“一个非常需要的女主人”。他的身体从来没有很强健的时候，为了保持创造的活力，承担巨大的研究任务，他为自己规定了铁的纪律。他准时在晚间十点就寝，每天早晨五点钟起床，一天只吃一顿饭。不管天气如何，每天都按时散步。他的守时是众所周知的，以至他的邻居们经常根据他早晨出现的时间对表。

康德的外表给人以冷漠之感，可实际上却是一个热诚而又富于同情心的人，他很热心于他的教学工作，并且乐于与青年人交往。据说，约·哥·费希特（J. G. Fichte，1762～1841）就是在康德的支持下由一名小人物一跃而跻身于名家之列的。费希特是一个贫苦织工的儿子，童年时一个侥幸的机会使他有了读书的可能。一个星期天，他在教堂里听神父布道，一位很有钱的地主偶然问他是否听懂了。他不仅听懂了，而且逐字逐句地全部复述了下来。这个人大为惊叹，并且资助他进入了贵族学校。后来，他进入莱比锡大学继续学习神学，以给私人授课挣得糊口，由于穷得实在付不起学费，没能坚持到毕业考试。后来，他辗转在几个城市做家庭教师。1791年，他去华沙想当家庭教师，但未能成功。回来的路上，他慕名去拜访康德，把艰苦劳作五个星期的《一切天启的批判》小册子呈送给这位

老哲学家。康德对费希特的才华十分欣赏，很同情他的坎坷遭遇，于是把这本小册子推荐给了出版商。考虑到名家书好销售，在排版的时候，出版商删掉了作者的名字和序言，以便使人认为它是康德的著作。对此，康德极为不满。为了给费希特创造成名的机会，康德对真正的作者大加赞扬，使费希特一夜间声名雀躁。不久，费希特就被聘到耶拿大学任教。费希特不负康德所望，发表了数本著作。1810年柏林大学成立，费希特被聘到那里，并出任副校长。

康德一生没有离开过他的出生地哥尼斯堡。他是一位笃诚的信教者，他有一句名言："有两种东西，我们愈时常、愈反复加以思维，它们就给人心灌注了时时在翻新，有加无已的赞叹和敬畏：'头上的星空和内心的道德法则'"。据说他临死前说的最后一句话是："Es ist gut"（这很好）。

康德的名字使哥尼斯堡城倍增光彩，为怀念康德，哥尼斯堡人喜欢将自己的家乡称为"康德之城"，在克奈芳福岛上的哥尼斯堡大教堂附近还树立了他的半身塑像。每到10月22日康德诞辰的这一天，地下圣堂对公众开放，有此机会，和别人的家长一样，小希尔伯特的母亲总是喜欢带着自己的孩子去康德墓地，瞻仰康德的半身像，端祥他那熟悉的面孔，认真地拼读圣墙上康德的格言："世上最奇妙的是我头上的灿烂星空和我内心的道德准则"。康德的巨大声誉，使希尔伯特从小就受到了热爱科学的熏陶。

在希尔伯特成才的历史上，哥尼斯堡大学的数学传统是值得提出的。哥尼斯堡大学建立于1734年，雅可比开创了它的数学传统。雅可比21岁毕业于柏林大学。23岁到哥尼斯堡大学任副教授，25岁晋升为教授，一直到1842年因身体健康不良辞去教

授职位，到柏林科学院工作。他在哥尼斯堡大学赢得很高声誉，被选为柏林科学院院士、法国科学院院士、英国皇家学会会员，还是彼得堡科学院、维也纳科学院、马德里科学院以及其它一些科学院的名誉院士或通讯院士。

雅可比是椭圆函数论的创始人之一，另一个创始人是挪威的阿贝尔（N. H. Abel，1802～1829）。他在数论、线性代数、变分学、微分方程、函数论等许多学科都有重大发现，以他的名字命名的重要数学术语就有20几个。

雅可比是一名热心的教师，他经常把自己尚未发表的研究成果讲授给学生，让他们加以发展和完善，散播到学术界。雅可比的到来，带来了哥尼斯堡大学数学的良好声誉，这个良好的声誉使哥尼斯堡大学逐渐在德国数学界占有了一席之地。

雅可比的继承人是里奇劳特（Richelot），他在数学上并没有什么突出的研究成果，他留给哥尼斯堡人最深刻的印象是热心教育，珍惜人才。他以发现外尔斯特拉斯而名垂数学史册。1841—1851年间，外尔斯特拉斯还是一名不为学术界所知的中学教员，他白天忙于繁重的教学任务，只能利用晚间苦心钻研数学。里奇劳特得知外尔斯特拉斯的数学才能，积极劝说哥尼斯堡大学授予他名誉博士学位，还亲自到离城60公里以外的小市伦斯堡授给这位中学教员学位证书。里奇劳特谦虚地称外尔斯特拉斯为“我们的老师”，并预言他必将在数学界有出人头地之日。不久，外尔斯特拉斯果真名声显露，后经库麦尔引荐，被聘为柏林大学教授。外尔斯特拉斯的这段经历为哥尼斯堡大学增添不少光彩。

哥尼斯堡大学的数学传统，还与大数学家欧拉（L. Euler，1707～1787）的名字联系着。这个联系是由该城别具特色的

七座大桥引起的。这七座桥连接河心岛O、两岸A、B和半岛C（如图1所示）。每到节假日，居民们来河心岛游玩时，大都

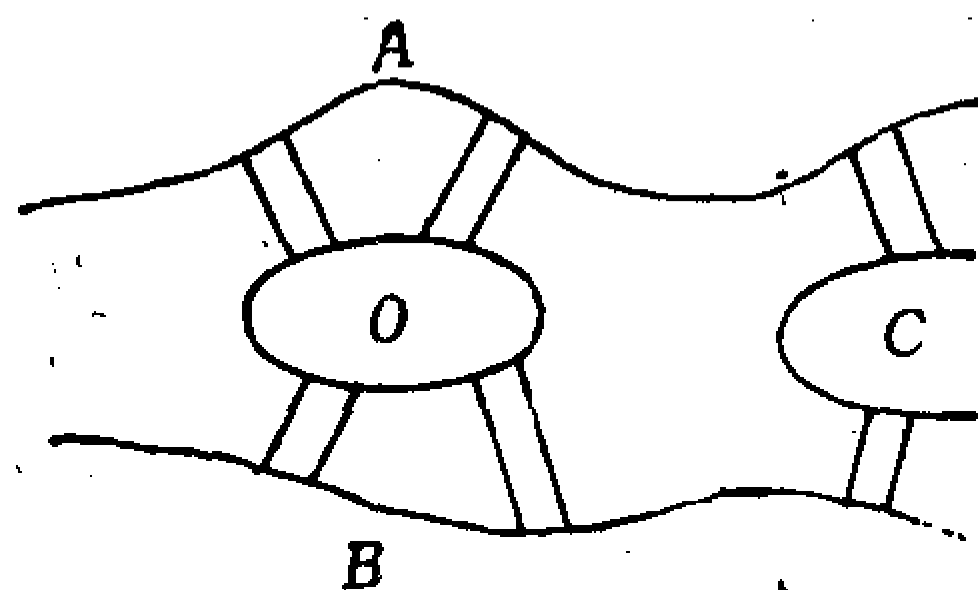


图1

喜欢走遍七座桥。久而久之，不知谁对七座大桥的配置方式发生了兴趣，提出这样一种有趣的漫步路线：一次通过这七座桥，不准在任何一座桥上重复通过。这就是数学史上著名的“哥尼斯堡七桥问题”。

为找到这样的漫步路线，许多名人参加了尝试。可是试来试去谁也没能达到目的。1736年，有几名大学生写信给当时任彼得堡科学院院士的数学教授欧拉，请帮助解决。年仅29岁的欧拉不几天就回信给出了问题的答案。不过，欧拉的答案与大学生们所期望的完全相反。他告诉大学生们，一次不重复地走过这七座桥是不可能的。欧拉解决这一问题的思路是：用抽象分析法把河心岛、半岛和两岸分别抽象为点O、C、A、B，把七座桥抽象为七条线。于是，一次不重复地通过这七座桥，就转为一笔不重复地画出如图2所示的几何图形。

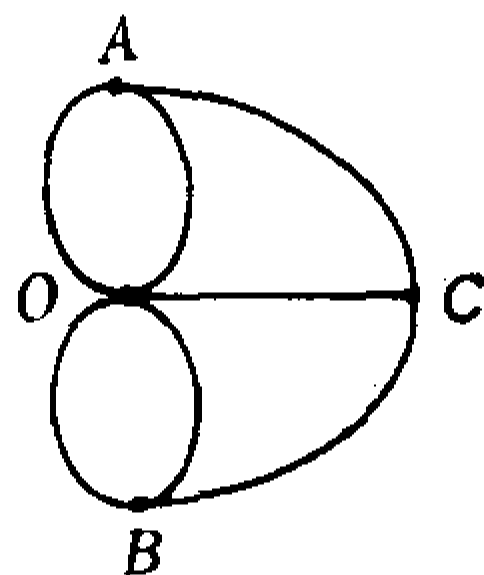


图2

欧拉得出结论：任何一个一笔画出的连通图，要么没有“奇次点”，要么只有两个“奇次点”。在哥尼斯堡七桥的抽象图中，O、A、B、C都为“奇次点”，因此不

能一笔画出，哥尼斯堡七桥也就自然不能一次不重复地通过。

哥尼斯堡人出自好奇心而提出的问题，以及欧拉对问题的答案，在数学史上占有着重要的地位，它成为拓扑学的一个重要发端，后人把数学上的能一笔无重复画出的线路称为“欧拉路”，把欧拉提出的那个判定定理称为“欧拉定理”。对哥尼斯堡的大学生来说，这个问题的提出和解决，使他们亲身体验到了数学的巨大力量。

希尔伯特就是在这样一座具有良好文化传统的小城中度过了青少年时代。他出生在一个并不十分富裕、受人尊敬的法官家庭，祖父和父亲都是当地的法官，有一个叔叔是律师，另一个是大学预科学校的校长。他的母亲是当地一名商人的女儿，受过良好的教育，对哲学、天文学和数学很感兴趣，并且被素数的奇妙性质弄得着了谜。也许正是母亲身上潜在的数学素质，使希尔伯特后来没有成为一名法官，而是成为一名有成就的数学家。

§2　从潜才到显才

科学人才，按其才能成熟的程度以及被社会确认的时间，可分为潜才和显才两种不同的类型。潜才是才能尚未成熟，或虽已成熟，但由于种种原因而未能取得社会确认的人才；显才则是才能已经成熟且得到社会确认的人才。潜才是孕育中的人才，是显才的前身，显才由潜才发育、演变而来。科学的历史表明，任何学术名家的成才，无一不曾经历过一个或长或短的潜在阶段，即有一个由潜才到显才的过渡时期。希尔伯特也同样如此。

一　才华孕育

科学人才由“潜”到“显”转化的道路往往是艰难曲折的。社会经济的繁荣、科学技术的盛世以及民族、地区的文化传统，只能为人才的产生和发展提供良好的社会背景。一个人究竟能否完成由潜才到显才的转化，起决定性作用的因素则是本人的努力和奋斗。而这种努力奋斗又总是围绕着人生选择进行的，因此恰当的人生选择对于青少年培养和发挥其才华有着极为重要的意义。希尔伯特成功的一个重要原因，就是他把数学选择为自己终生的奋斗目标。

数学史上不乏才华超众的早慧少年，他们的佳话在数学的史册中几乎俯拾皆是。帕斯卡（B. pascal，1623～1662)16岁写出历史名著《圆锥曲线论》，19岁发明加、减法机械计算器；克雷洛（A. C. Clairaut，1713～1765）12岁向巴黎科学院提出关于四次代数曲线的论文，16岁写出专著《双重曲率曲线的求法》，18岁被破例授予法国科学院院士称号；欧拉13岁入大学学习，19岁以一篇关于船桅的数学论文，获巴黎科学院的奖金；高斯更以少年早慧为世人所知。

希尔伯特在科学上并不属于少年早慧者，他童年没有表露出什么特殊的数学天赋，他虽然继承了母亲的良好的数学素质，然而这种先天的素质直到预科学校毕业时才得到开发和强化。

希尔伯特的启蒙教育比较晚，8岁才上学，而且并不显得比别人聪明，学习成绩一般。他先上了皇家腓特烈预科学校，这所私立学校在哥尼斯堡名声极好，康德就是该校的毕业生。但这座学校的教育思想却很保守，初级部（相当于小学）课程的内容，主要是阅读和书写日耳曼语和罗马语，分析简单的句

子和一些圣经故事，算术知识少得可怜。本科部（相当于中学）仍以语言课占课程的绝大部分，拉丁语和希腊语被视为至高无尚的主修课程，数学课不被重视，份量少得可怜，而自然科学的课程就根本不开设。

希尔伯特对古典语言课程不感兴趣，他不喜欢死记硬背，他的作文常常要有母亲的帮助才能完成。也许是母亲数学素质的影响，希尔伯特的数学理解力却很强，能给同学讲解数学问题。家里人大都认为他的恼子有点怪，唯有母亲真正了解他。

值得庆幸的是，在预科学校最后的一个学期，希尔伯特从腓特烈预科学校转到了威廉预科学校。这是一所公立学校，很重视数学和自然科学课程，甚至讨论几何学的新进展。希尔伯特不必为把精力全放在语言课和拉丁语、希腊语的死记硬背上而烦恼了。他用心学习数学，老师也看出了他在这方面有些天赋，给他不少个别指导和帮助。他的勤奋使他的各门课程几乎全都是优等。数学成绩则是更好，得了当时最高的成绩“超等”。在毕业考试中，他的笔试考得异常出众，以至免去了口试。在他的毕业证书的评语中写有：“他对数学表现出极强烈的兴趣，而且理解深刻，他用非常好的方法掌握了老师讲授的内容，并能有把握地、灵活地应用它们。”

预科学校毕业后，父亲执意要他学法律，他却不顾父亲的反对报名攻读数学。把人生献给数学，已成为他的奋斗目标。1880年秋，希尔伯特考入哥尼斯堡大学哲学系，当时数学专业设在哲学系。此时，希尔伯特已经18岁，和那些早慧科学家相比，以这样的年龄起步攻读数学，已经是比较迟的了。

大学生活与预科学校有着明显的不同，这里充满着自由的学习气氛，没有预科学校那种刻板的课程设置和种种严格的规

矩，课程由教授们自己安排，学生可随意选学他们喜爱的任何一门课程。在大学的第一年，刚从预科学校的束缚中解放出来的学生，大都有松口气的情绪。他们把大量时间用于消遣上。希尔伯特却不然，他一开始就把精力放在数学上。

根据当时的习惯，大学生可以随便到其他大学听课。这种流动式的学习，可使学生们开阔眼界。第一学期，希尔伯特在本校听了积分学、矩阵论和曲面的曲率论三门课。第二学期，他到海德尔堡大学选听了富克斯（L. Fuchs，1833～1902）的微分方程课。富克斯是著名数学家外尔斯特拉斯的学生，后来被聘到柏林大学任教，成为外尔斯特拉斯的助手和好友。微分方程论是他素有专长的研究领域，著名的富克斯方程就是他在这一领域的研究成果。他还把微分方程理论卓有成效地移植到复变函数论的领域。富克斯讲课生动形象，给人印象深刻，习惯于对所讲的内容在课堂上现想现推。这种讲课方法风险很大，容易把自已置于困境，但却受到学生们的欢迎，因为他们由此能得到一个机会，亲眼看到数学大师的思维活动实际上是怎样进行的。希尔伯特在后来的教学中，也习惯于课堂上现想现推，在很大程度上是受到富克斯的影响，

第三个学期，可能由于哥尼斯堡人固有的家乡观念，希尔伯特返回了哥尼斯堡大学。这时的哥尼斯堡大学只有韦伯一名数学教授，他是雅可比和里奇劳特的很好的继承人。他多才多艺，在代数数论、函数论、代数几何、数学物理方程等方面都有重要的成果。他和黎曼合著的《数学物理的偏微分方程讲义》，在20世纪初是应用数学解决物理问题常用的参考书。希尔伯特从韦伯那儿学习了数论、函数论，还参加了韦伯组织的不变量理论的讨论班，初步接触和熟悉了这门理论。在以后的10

年里，这个新的领域一直是希尔伯特数学攻关的主要目标。

1883年，韦伯离开哥尼斯堡去夏洛滕堡任教，林德曼被邀接替了他的教授职位。一年以前，林德曼在学术界还是无名气的小人物，只是由于证明了π的超越性而名声大震。他的这项工作首次解决了“化圆为方”的不可能问题，这道数学难题曾困扰历代数学家长达二千多年。

所谓超越数，是相对代数数而言的另一类数。代数数是指可满足某一有理系数代数方程的实数，超越数则是不满足任何有理系数代数方程的实数。超越数是18世纪对无理数的研究取得一定进展后产生的概念。1794年，勒让德曾猜测π可能是超越性问题，一直吸引着19世纪数学家们的兴趣。1873年，法国数学家爱米特（C. Hermite，1822—1901）首次给出e的超越性的证明，但他却没有信心继续去攻克π的超越性问题。他在给博查特的信中自述：“我不敢去试着证明π的超越性。如果其他人承担这项工作，对于他们的成功没有比我再高兴的人了，但请相信我，我亲爱的朋友，这决不会不使他们花去一些力气。”事隔9年之后，1882年林德曼应用了实质上与爱米特证明e的超越性没有什么差别的方法证明了π的超越性，关键在于他巧妙地运用了欧拉在1748年给出的欧拉公式

$$e^{i\pi}+1=0。$$

林德曼开设的讨论班很出名，希尔伯特是这个讨论班的积极参加者，在那里他进一步熟悉了不变量理论，并对它产生了浓厚兴趣。希尔伯特的博士论文是在林德曼的指导下完成的。起初，他想去研究连分数的一种推广，林德曼告诫他：“很不幸，雅可比早就完成了这项工作”。在林德曼的建议下，希尔伯特选择了不变量论中的问题：关于某些代数形式的不变性

质。这个题目的难度对考博士学位的人来说恰到好处，有难度又有希望解决。希尔伯特的这篇论文做得很出色，思路独到，受到林德曼的高度评价。

希尔伯特在大学时代所受到的最大影响，不是听课，不是看书，也不是参加讨论班，而是同两位青年数学家的密切交往。一位是闵可夫斯基，另一位是赫尔维茨。

闵可夫斯基一家是1872年秋，也就是希尔伯特10岁那一年，从俄国靠近科夫诺的亚力松坦搬到哥尼斯堡的。他家和希尔伯特家只隔一道普累格尔河。闵可夫斯基比希尔伯特小两岁，和希尔伯特不同，他不仅是一名早慧少年，而且酷爱古典文学。当希尔伯特苦于预科学校的语言课非要死记硬背时，他正在悉心阅读莎士比亚、席勒和歌德的作品，几乎把歌德的著作全都能背下来。闵可夫斯基在少年时代就表现有与众不同的数学才能。据说有一堂课，老师把一道数学题解错了而“挂了黑板”，学生们异口同声地叫道：“闵可夫斯基，去帮帮忙！”他只用5年半就学完了预科学校8年的课程，随后便考入哥尼斯堡大学攻读数学。

他先到柏林大学学习了三个学期，在那里因成绩出色得到一笔奖金，这笔钱他给了一个家境贫寒的同班同学。1882年春，他返回哥尼斯堡大学继续学习，同年成功地解答了巴黎科学院出榜征答的问题：将一个数表成五个平方数的和。经评审，闵可夫斯基和已去世的著名英国数学家史密斯(H. J. S. Smith，1826～1883）共享了这份数学大奖。这一成功轰动了数学界，也由此引起一场风波。原来，英国的数学家们提出抗议：居然让一个小孩子和他们已过世的尊贵同胞分享一份数学奖，简直是丢他们这位同胞的脸。巴黎科学院并没有在这种压力面

前让步，法国著名数学家、巴黎科学院院士约当（M. E. C. Jordan，1838—1922）写信鼓励闵可夫斯基："干吧！我请求你，干成一个伟大的数学家。"这件事在哥尼斯堡更是传为佳话，希尔伯特看在眼里，喜在心头，很快就和他交上了朋友。

赫尔维茨比希尔伯特大3岁，他是1884年春从哥廷根到哥尼斯堡大学担任副教授的。和闵可夫斯基一样，他也是数学方面早熟的人才。他的父亲是一个普通的工匠，家庭生活很清贫。在预科学校念书时，赫尔维茨就显示出与众不同的数学才能，受到老师舒伯特的赏识。舒伯特常在星期天给他单独指导，并劝说他的父亲支持孩子继续深造。此间师生俩还合作发表了论文。在舒伯特的动员下，父亲从亲朋那里借来钱让儿子上了哥廷根大学。在克莱因的门下，他得了博士学位。

希尔伯特和闵可夫斯基很快就同这位年轻的副教授建立了密切的友谊。共同的科学兴趣和对科学的乐观态度，把他们三人紧紧地连结在一起。每天下午5点正，三个人准时相会去校园内的苹果树下进行"数学散步"。赫尔维茨有着广泛而坚实的基础知识，又经过很好的整理，他是理所当然的领头人，其他两位对这位年轻的师长心悦诚服。

在日复一日的数学散步中，三位年轻人仔细勘查着数学王国的每一个领域，热烈地讨论着当代数学发展中的各种重大问题，相互交换对问题的理解，交流彼此的想法和研究计划。希尔伯特象海绵吸水一样从两位数学天才身上吸收数学知识和数学研究的技艺。他感到，这种最悠然而有趣的学习方式，是最有成效的，比钻在昏暗的教室或图书馆里啃书本不知要好多少倍。

苹果树下的数学散步，使希尔伯特给自己未来的事业打下了全面而牢固的基础。在后来的数学研究中，希尔伯特之所以

能够在好几个领域作出重大的成果，在1900年的巴黎国际数学家代表大会上提出23个预示数学未来发展方向的著名难题，是与他的这段经历分不开的。

在希尔伯特的一生中，数学散步几乎成了他生活中不可缺少的一部分，无论是在哥尼斯堡，还是在哥廷根，他总要邀几个朋友或他喜爱的学生，按确定的钟点去进行这种数学散步。1909年，闵可夫斯基因病去世。在哥廷根科学会纪念闵可夫斯基的演说中，希尔伯特特意追述了往日与闵可夫斯基共同勘查数学王国的情景："我们的科学——我们对它的热爱超过了一切——把我们结合在一起。在我们的眼里，它就象一座鲜花盛开的园林。花园里有被人踏就的路，空闲时你可以循着它去观花赏景，悠然自得而不费力，当一旁有个情趣相投的朋友作伴时就更是如此。但是，我们还喜欢去寻找那些深藏不露的小径，去发现更多出人意料的能大饱眼福的景色；当一个人向另一个指点出这种奇景时，我们共同赞美它，真是其乐无穷"。

1919年，赫尔维茨去世，希尔伯特在哥廷根科学会发表悼词，追念自己青年时代的良师和朋友。在悼词中，他又一次提起，在哥尼斯堡那几年的日复一日的数学散步。

二　通往成功的学习旅行

1884年秋，希尔伯特完成关于代数不变量理论问题的学位论文，12月11日通过口试。1885年2月7日，他通过答辨正式被授予哲学博士学位，在科学生涯中迈出了决定性的第一步。此时他深感自己还没有真正把握住当代数学思想的脉搏，还缺乏数学创造必要的经验和明确的目标。为了克服哥尼斯堡由于偏远而带来的局限，他决定作一次长途学习旅行，走访数学界的

名家。赫尔维茨建议他第一站到莱比锡拜访克莱因。

年仅36岁的克莱因当时已成为数学界一名传奇式的人物。他在波恩大学念书期间就担任著名数学家普吕克的助手，在其指导下开始发表数学成果。20岁刚过便进入成果累累的创造时期。22岁获得哥廷根大学教授资格，因无空缺没能前往就职，第二年在爱尔朗根当上了教授。在就职典礼上，他发表了“关于现代几何学研究的比较考察”的演讲，这就是数学史上著名的“爱尔朗根纲领”。这个纲领的历史意义，在于首次用群的概念把众多不同的看起来毫无关系的几何统一了起来，并作了科学的分类。它提出了一种新的数学观念：每一种几何都有一种群相对应，几何学的任务也就是探究图形在群的变换下所保持的不变的性质。这一新的概念，支配着几十年后几何学的研究方向。

克莱因是5年前从慕尼黑高等工业学校来到莱比锡大学任职的。在这期间，有两所大学给他下过聘书，先是美国的霍普金斯大学，接着是哥廷根大学，前一个他拒绝了。希尔伯特来访时，他刚刚作出去哥廷根的决定。克莱因很器重这个从哥尼斯堡来的年轻博士，并邀请他参加自己主持的讨论班。从希尔伯特在讨论班上的报告中，克莱因一眼就看穿了这是一位很有数学才干的青年人。他后来回忆起希尔伯特的这段来访时说：“一听他的报告，我就知道他是一个数学方面的后起之秀。”希尔伯特在讨论班上提出的那个报告，克莱因一直精心保存着。希尔伯特的卓越才能使他很快成了莱比锡数学界的一名活跃成员。他和克莱因结下了深厚的友谊，新年除夕，克莱因邀请希尔伯特参加家里举行的“小型宴会”。出席者除克莱因和他的夫人外，只有希尔伯特和另一位青年数学家皮克博士。

这两位青年人是克莱因精心挑选的客人。在谈话间，克莱因极力说服希尔伯特去巴黎访学。

从18世纪末到19世纪上半叶，巴黎一度成为世界数学活动最活跃的地方，以巴黎高等工艺学院为中心云集了一大批有才干的数学家。随着19世纪30年代世界科学活动中心向德国的转移，巴黎盛开的数学花朵开始逐渐凋谢。50年代以后，法国数学进入相对低潮时期。然而，巴黎数学传统的余辉，对世界数学的发展仍然有着强有力的影响。尽管放射闪电般光辉的杰出人物已经屈指可数，然而崭新的代表时代精神的数学思想在巴黎还是不断产生着。克莱因21岁时曾去巴黎访学，著名数学家达布（J. G. Darboux，1842～1917）和约当对他有过决定性的影响，尤其是约当1870年的巨著“置换群”，启示他把变换群的理论同方程式以及几何学联系在一起，其成果就是1872年提出的那篇具有历史意义的“爱尔朗根纲领”。正是有这样一段亲身经历，克莱因一有机会就把那些有培养前途的德国青年数学家送往巴黎，去接受那里的新思想。

在巴黎，希尔伯特一心扑在数学上，除了访问天文台外，几乎没有去别处观光。他首先拜访了彭加勒(J. H. Poincaré，1854～1912）。这位31岁的法国数学大师比希尔伯特大8岁，已经发表了一百多篇论文。彭加勒27岁成为巴黎大学的教授，33岁被选为法国科学院院士。就在希尔伯特来访的这一年，瑞典国王奥塞尔二世提出在所有国家的数学家中，进行一次有关三体问题的竞赛，彭加勒获得一等奖，这是他的许多杰作之一。希尔伯特选听了彭加勒的位势理论和流体力学课，通过几次交往，两人便建立了长期的友谊。

在这期间，希尔伯特还拜访了老一辈数学家达布、约当和

爱米特。爱米特知道这位德国青年很关心不变量理论，所以大部分谈话都是关于不变量的。他尽可能详细地向希尔伯特追溯了不变量理论的历史，介绍了不变量理论中最著名的、仍悬而未决的“果尔丹问题”。这一著名难题引起希尔伯特极大的兴趣，攻克这一难题的大胆想法就是此时产生的。三年之后，希尔伯特果真取得了成功。除了学术拜访和听课外，希尔伯特还参加了数学界的几次学术会议，在会议上尽可能去结识那些他所敬慕的数学家。

1886年6月底，希尔伯特返回哥尼斯堡，途中在哥廷根访问了刚刚到职的克莱因，向他详细汇报了巴黎之行的收获。实际上，克莱因对这些早已有所了解，因为希尔伯特在巴黎期间一直和他保持着通信联系。路经柏林时，希尔伯特访问了63岁的克隆尼克。

克隆尼克1845年毕业于柏林大学，是库麦尔的得意门生。早年经营商业和农事，数学只是他的业余嗜好。商业上的成功，使他有可能在30岁就退出商界专心数学研究。他虽然长期在柏林大学讲课，可直到60岁时才接替库麦尔正式任教授职位。他在高等代数和数论方面有许多重要贡献，著名的数论难题“克隆尼克青春之梦”，就是由他的工作提出的。他是数学算术化的积极拥护者。他认为数学上的存在只能是那些能够用有限步骤构造出来的东西，就象分数能表示成两个整数比一样。因此他只承认能够用整数表示出来的数，不承认无理数和超越数，更不承认康托尔的无限集合论。他曾指责林德曼关于π的超越性证明工作：“你那个关于π的漂亮研究有什么用呢？无理数根本就不存在，你为什么要研究这种问题？”他对问题的看法独断专横，语言刻薄，对分析学严密性的攻击，几乎把

德高望重的外尔斯特拉斯弄得老泪横流，对集合论的攻击，造成了康托尔的精神分裂症。

当希尔伯特打算去拜访这位让人望而生畏的数学名家时就有人提醒他，不要指望得到友好的对待。可是，在柏林希尔伯特并没有遭到克隆尼克的冷遇，两人在交谈中相处得很好。克隆尼克尽情而自信地向这位青年数学家谈论自己的计划：将数学“算术化”，从数学中清除一切“非构造”的概念。“假如我不能做这件事”，他说，“追随我的人将会去实行！”事隔一年多，希尔伯特第二次拜访他时，他仍然把大量的时间用于讨论究竟是什么东西构成数学实体的问题，并反复地强调“只有离散的和单个的事物有意义”。希尔伯特很看重和克隆尼克的交谈，每次都在小本子上认真记录，而且比访问其他数学家的谈话记的要多。克隆尼克在希尔伯特后来的科学生涯中有着双重的影响。这种影响明显表现在：希尔伯特一方面吸收和继承克隆尼克的某些思想和方法，另一方面又同他的直觉主义观点作坚决的斗争。

回到哥尼斯堡后，希尔伯特集中精力准备为获得讲师资格的论文，内容仍然是关于不变量的。1886年7月，他顺利通过学术考核。作讲师的第一年，开设了不变量理论、行列式理论和流体动力学等课程。1888年3月，他再次开始了那启人思绪的学习旅行。他选定的旅行路线，使他能顺路访问21位著名的数学家，重点则是放在爱尔朗根，去觐见“不变量之王”——果尔丹。

果尔丹比希尔伯特大25岁，很晚才从事科学事业。他为人坦率，很重友谊，对年轻人尤如父兄。他用大半生从事不变量理论研究，几乎所有的时间都在谈论代数不变量理论。他以突破一个著名的不变量问题开始了他的科学生涯，并因此荣获“不

变量之王”的头衔。为纪念他，一个更一般的仍未解决的重大问题，被命名为“果尔丹问题”。在希尔伯特到达爱尔朗根之前，果尔丹刚好发表了他的《不变量理论讲义》的第二部分，书中详细地阐述了他的思想和方法。

希尔伯特亲自聆听了“不变量之王”关于果尔丹问题的看法，弄清了果尔丹研究不变量问题的基本思路和方法。他感到，这是一个意义重大而关键的问题。这个问题强烈地吸引着他。回到哥尼斯堡之后，果尔丹问题一直占据着他的整个身心，无论是工作还是娱乐，甚至在跳舞的时候，他都在思考，寻求解决它的办法。同年8月，他突然宣布找到了问题的答案，使整个数学界为之一惊。果尔丹问题的解决，使希尔伯特在数学界首次赢得巨大声誉，这项工作表明他的创造力已经进入成熟时期，因而可作为他完成由潜才到显才过渡的重要标志。他下一步的重要目标，则是尽快攀登上现代数学的高峰，成为第一流数学家。此时，他已经26岁。

前后两年的学习旅行，在希尔伯特的一生中有着决定性的意义。它使希尔伯特开阔了思想，增长了才干，找到并踏上了通往成功的道路。以后发生的事情，则是希尔伯特学术地位的迅速上升。1892年，在哥尼斯堡当了8年副教授的赫尔维茨被聘到苏黎世瑞士联邦技术学院任教授，希尔伯特接替了他的位置。可是晋升教授却是一件很不容易的事情。在当时的德国，能升任教授的只是寥寥无几的少数人。一般的情况下，教授的席位是固定不变的，只有在现有教授离职、退休或去世后，才能选拔继承人递补。在柏林大学，当时只有三名数学教授，在大多数大学里，仅有二名，而哥尼斯堡大学只有一名。希尔伯特还算幸运，1893年，林德曼接受了慕尼黑大学的邀请，前往

就职。经林德曼提名，希尔伯特接任了教授职位。

到哥廷根工作，是希尔伯特梦寐以求的夙愿。对他来说，最富有吸引力的是那里有从事学术研究的良好的环境，有高斯开创的光辉的哥廷根科学传统，有克莱因这样伟大的人物。而且在当时，能当上哥廷根教授，就意味着赢得了第一流数学家的声誉。

克莱因的声望吸引着世界各国的青年数学家，他的讲演被奉为经典，学生们称他为"云端的神"。为了哥廷根的事业，克莱因也需要希尔伯特这样的天才。1894年，机会终于来到了，H·韦伯决定接受斯特拉斯堡大学的邀请，辞去哥根廷教授职位。克莱因积极向哥廷根教授会推荐希尔伯特。12月初，希尔伯特收到克莱因的来信。信中充满热情地写道："为了我的科学团体，我需要你这样的人。这是因为你的研究方向，你丰富而强有力的数学思想，还有，你仍然处在富于创造活动的年龄。我指望你将给这里的数学学派增添新的内部实力，这种力量已经有过不停顿的增长，看来，它还将变得更强。甚或，你还会产生出使我返老还童的影响。"

希尔伯特在回信中高兴地写道："我的一切努力所追求的最终目的，我本希望只能在遥远的未来才能够实现的夙愿，已经有了实现的可能……，丝毫不必怀疑，我将万分喜悦并毫不踌躇地接受哥廷根的召唤。"

经过克莱因的努力，希尔伯特如愿以偿。1895年3月，33岁的希尔伯特来到哥廷根，由此进入他一生的黄金时代。随着哥廷根生活的到来，希尔伯特开始跻身于现代数学家的前列。若干年后，许许多多第一流的数学家的名字变得晦暗，可希尔伯特的名字却愈加光采照人。

第二章　可贵的反常规精神

数学研究是高度复杂、极富创造性的一种认识活动，它不仅需要坚实的数学知识，有效的研究方法，而且还需要大胆的反常规精神。在科学研究中，反常规是相对常规而言的，反常规精神的根本内容是不墨守成规，不囿于传统，敢于离经叛道，敢于革旧立新。科学的历史表明，大凡作出突破性重大成果的科学家，无一不是具有反常规精神的人。就数学领域而言，希伯索斯（Hippasus，约公元前5世纪）敢于反毕达哥拉斯学派“宇宙是整数的和谐体系”的陈旧观念，发现无理数$\sqrt{2}$；笛卡儿（R. Descartes，1596～1650）敢于反“几何和代数分道扬镳”的传统思维模式，发明解析几何；罗巴切夫斯基（N. Lobatchevsky，1792～1856）敢于反“欧氏几何是唯一可能几何”的传统观念，创立非欧几何；勒贝格（H. Lebesgue，1875～1941）敢于反“黎曼积分完美无缺”的传统框框，建立勒贝格积分理论；康托尔敢于反自亚里士多德（Aristotle，公元前384～322）以来对无穷问题的传统思考方式，创立超穷集合论，等等，都明显体现了科学中的反常规精神。希尔伯特作为从事创造性数学研究的杰出人物，同样是一位富有反常规精神的科学勇士，他的许多重大成果的取得，是与他的反常规精神分不开的。这里仅就几个典型事例作以剖析。

§1 攻克果尔丹问题

希尔伯特反常规精神的一个重要表现是，在解决困难的数学问题时，不固守传统的思维模式，不盲目因袭已有的研究方法，敢于开拓新的思路，提出新的研究方法。希尔伯特成功解决著名的果尔丹问题，就是生动的一例。

一、果尔丹问题的提出

果尔丹问题是19世纪中叶代数不变量理论的一个前沿问题，也是近代数学史上的著名难题之一。

“不变量”一词，通俗的理解，是指被研究的对象在某种变换下保持不变的那些量，它们可以是数量、向量或其它类型的量。例如，几何图形的线段的长度和角的角度是刚体变换下的不变量。不变量理论发端于对图形的几何不变性质的研究。早在17世纪射影几何学肇始时期，数学家们就注意到，从某点作一图形的投影，取这投影的一个截景，这就把原图形变换成了一个新的图形，原图形中那些在变换后保持不变的性质是值得认真研究的。射影几何学的任务就是研究图形在射影变换下不变的那些性质。如点、直线、在一直线上的四点的交比和过一点的四直线的交比等，在射影变换下都是保持不变的。

解析几何的创立，使代数方法广泛应用于几何图形性质的研究。由于可以用代数式来表示几何图形及其性质，就使得对图形在变换下不变性质的研究，转变成了对代数表达式在坐标变换下不变量的研究，由此也就产生出一个新的重要概念——

代数不变量。

代数不变量总是相对某种变换而言的，最简单的变换是线性变换。为说明代数不变量概念的实质，我们以二元二次型在线性变换下的不变量为例。

二元二次型是指带二个变数的二次多项式，一般地可表示为

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f。 \tag{1}$$

线性变换相当于把坐标x和y经过旋转和平移变换为新坐标x'和y'，一般地可表示为

$$x=\alpha_1x'+\beta_1y',$$
$$y=\alpha_2x'+\beta_2y'。$$

在线性变换的作用下，二元二次型(1)变成了

$$a'x_1{}^2+2b'x'y'+c'y'^2+2d'x'+2e'y'+f'。 \tag{2}$$

(1) 式中的系数经过变换后显然都改变了，但存在着由系数组成的一些式子，它们的数值经过变换后并不改变。这些式子就是二元二次型在线性变换下的不变量。下面就是这样的一些不变量：

$$I_1=a+c,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=ac-b^2,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}=acf+2bed-cd^2-fb^2-ae^2。$$

也就是说，I_1、I_2、I_3对(1)式和(2)式的系数各自保持不变，即

$$a+c=a'+c',$$

$$ac-b^2=a'c'-b'^2,$$

$$acf+2bed-cd^2-fb^2-ae^2$$

$$=a'c'f'+2b'e'd'-c'd'^2-f'b'^2-a'e'^2。$$

I_1、I_2、I_3叫作基本不变量，二元二次型在线性变换下的所有不变量，都可以通过这三个基本不变量来表达。

代数不变量理论的系统研究是从19世纪30年代开始的，主要奠基者有英国的凯莱（A. Cayley，1821～1895）、西尔维斯特（J. Sylvester，1814～1897）和萨蒙（G. Salmon，1819～1904）。术语“不变量”（invariance）是由西尔维斯特最先明确提出的。

不变量理论研究的最初方向，是发现那些特殊的不变量，如二元二次型在线性变换下的各个不变量。当数学家们求得许多特殊的不变量之后，便转而去探求不变量的完备性，即对已给数目的变量和次数的一个型，求其基本的不变量，使得任何其它的不变量可以通过基本不变量表达出来。如二元二次型在任何线性变换下的不变量，都可通过基本不变量I_1、I_2和I_3表达出来。这就产生了一个一般性的问题：对于给定的型，是否存在一组有限的基，使得其它所有的不变量，都能够用这组基的有理整式表出？果尔丹首先解决了二元型有限完备系的存在性问题，由于他后半生主要从事不变量理论研究，并取得明显成果，使得他在学术界赢得了“不变量之王”的头衔。为了纪念他，上述求不变量完备系的一般性问题，就冠上了他的名字。

二　传统思路的失败

随着不变量理论在数学各部门应用的扩大，不变量理论的重要作用日益显露出来。1872年，克莱因在爱尔朗根大学发表

著名演说《关于现代几何学研究的比较考察》，把几何学看作研究在变换群下图形的不变的性质，不同的几何学研究的是在不同变换群下图形的不变的那些性质，由此运用变换群和不变量理论统一了几何学。到了1880年，不变量理论已统一了数学的很多领域，它的意义可从西尔维斯特在1864年说的一段话看出："正如俗语说，条条大道通罗马，所以至少就我自己情况说，代数上的所有研究迟早都要归宿到近世代数的大厦，在其闪闪发光的大门口铭刻着不变量论这几个字。"不变量理论已成为数学研究的重要工具，可是由不变量理论本身产生的果尔丹问题，却迟迟得不到解决。

果尔丹曾于1868年解决了问题的一种最简单情况：对任何给定次数的二元型存在一组有限基。后来又给出了三元二次型、三元三次型及某些特殊三元四次型的有限基。果尔丹以善于计算而著称，人们称他是一个"算法家"。在他的不变量理论论文中，充满着长长的公式和繁难的计算，有一篇20页全是公式，中间没有插进任何自然语言。

果尔丹的证明是一种构造性证明，这种证明的特点是：通过具体的计算，把给定型的有限基实际构造出来，就象解方程一样，把方程的根具体地求出来。这种实际构造基的方法虽然逻辑上无懈可击，但运用起来极其繁难，计算过程犹如公式的丛林，令人望而生畏。对于多个变量和复杂变换群的情况，想利用这种构造性的算法工具，更变得出奇的困难。果尔丹的学生艾米·诺德在1907的博士论文"三元双二次型的不变量完备系"中给定了三元四次型的协变量型的一个完备系，共331个，足见构造性算法的繁难。

自从果尔丹自己解决了最简单的情形以来，寻求解答一般

性问题的人，在本质上都遵循着他的构造性证明的思路，试图运用算法工具把给定型的有限基具体地构造出来。然而，沿着果尔丹确立的这条思路，德国、英国、法国和意大利等国家的许多数学家，经过20年的艰苦努力，也没能对问题的一般提法取得任何有希望的进展。

三　开拓新的思路

正当数学家们因袭果尔丹的常规思路，试图借助算法工具，通过构造性证明去解决果尔丹问题而又屡遭挫折时，26岁的希尔伯特向这一历史名题进击了。

鉴于以往的失败，他没有盲目地捡起果尔丹的算法工具，而是想到，既然果尔丹的方法长期不能奏效，那么要获得预期的证明，唯一的出路是选择一条完全不同于过去的途径。他果断地把果尔丹的算法工具搁置一边，并从本质上改变了问题的提法：假如给定了无穷多个包含有限个变量的一组代数形式系，问在什么条件下，存在一组个数有限的代数形式系，使得所有其它的形式可以表成它们的线性组合，系数是原来那些变量的有理整函数？经过精心的思索和探究，他终于得到了问题的答案：这样的形式系总是存在的。有了这个定理，不变量系作为上述代数形式的一种，其有限基的存在性证明自然也就得到了解决。1888年9月6日，希尔伯特在寄给哥廷根科学会《通讯》的一篇札记中，简要说明了他是如何用统一的方法对任意给定的型建立起果尔丹定理的。

希尔伯特的出奇制胜使整个数学界为之一惊，谁也没有料到，这个著名问题竟会在一名年轻的讲师手中得到解决。开始，数学家们几乎完全不相信有这么一回事，接着便产生各种奇怪

的反响。希尔伯特的老师林德曼很不理解自己学生的解法，抱怨这种解法令人不快、有害、古怪，因为它既没有给出具体的有限基，也没有指出如何才能把有限基构造出来。“不变量之王”果尔丹认为希尔伯特的证明根本不能算是数学意义上的证明，他大声疾呼：“Das ist nicht Mathematik, Das ist Theologie！”（这不是数学，这是神学！）。固守构造性证明方法的克隆尼克，对希尔伯特的这项工作始终持以否定态度，他公开指责，没有构造的证明根本谈不上是数学证明，因为没有构造就不能算存在。

同年12月，果尔丹定理的证明正式出版，希尔伯特把论文寄给凯莱一份。这位不变量理论的奠基者，对希尔伯特的证明同样深感疑惑，他虽然认识到希尔伯特的工作有重要的价值，但一时还弄不懂希尔伯特的证明方法以及是如何解决这一历史难题的。直到希尔伯特寄来两封解释信，他才真正理解了这位青年人的思路并确信已经解决了这个重大问题。

希尔伯特的工作之所以没能立时得到数学界同行的承认和理解，甚至遭到果尔丹等人的激烈反对，并非是由于他的论文深奥难懂，而是他的证明方法具有反常性，在当时看来很不符合常规。这种方法是非构造性的，它在证明某个数学对象存在时，并不需要象果尔丹和克隆尼克等人试图做的那样，把这个对象实际构造出来，也不必去说明如何去构造，所需要的一切就是从逻辑的必然性方面去证明这个对象必然存在。这种存在性证明的思想方法，在今天看来已经十分平常，然而在当时，它的提出却是令人难以接受的。

事实上，在当时占统治地位的数学思维模式是构造性的，克隆尼克就是维护这种思维模式的代表人物。他认为，一个数

学对象是存在的，必定能具体地构造出来，否则就是不存在的。整数和分数能实际构造出来，因此它们是存在的，可作为数学的对象来研究。而无理数、超越数和康托尔的超限数就不能算是存在，因为无法通过有限步骤把它们具体地构造出来。希尔伯特解决果尔丹问题的存在性证明，是对克隆尼克构造主义数学观的尖锐挑战，自然要遭到克隆尼克等人的坚决反对。

其实，早在希尔伯特之前，就有人使用过存在性证明方法。如欧几里得的素数无穷的证明，高斯的“代数基本定理”的证明，柯西的微分方程解的存在性证明，都体现了存在性证明的思想。还有，有时人们为了证明某个数学对象的存在，使用间接证明方法，不去直接证明这个数学对象是怎样存在的，而是去证明如果这个对象不存在就会导致矛盾。这种间接证明方法，实质上也是一种非构造性的存在性证明。但以往的这类工作都没能象希尔伯特那样对数学的思想方法产生如此巨大的影响。希尔伯特是历史上第一个认识到存在性证明的深刻意义和价值，并以极端漂亮和动人的方式运用它的人。

对于那些固守构造性证明方法，认为非构造的存在性证明是毫无意义的人，希尔伯特给予了有力的回答：“纯粹的存在性证明之价值恰恰在于，通过它们就可以不必去考虑个别的构造，而且各种不同的构造包摄于同一个基本思想之下，使得对证明来说是最本质的东西清楚地突现出来；达到思想的简洁和经济，就是存在性证明生存的理由……禁止存在性证明……等于废弃了数学科学。”

为了使人们接受存在性证明的合理性，大胆地去使用存在性方法，希尔伯特在1892年又给出了求不变量基的一个构造方法。通过希尔伯特的一系列工作，人们逐渐认识到并接受了希

尔伯特的工作所产生的革命性影响。果尔丹向希尔伯特的成功表示了敬意，并优雅地说："我终于相信神学也有其优点。"他本人还简化了希尔伯特给出的存在性证明。

然而，对存在性方法的怀疑和反对还是大有人在的。克隆尼克去世20年之后，他的后继者布劳威仍然把存在性证明作为攻击不同学术观点的目标。布劳威坚持认为，当我们说一种具有给定性质的对象存在时，本身就意味着已经知道了能找出或构造出这个对象的方法。因此，在围绕数学基础问题而展开的论战中，布劳威又重新提起了希尔伯特年青时对不变量有限基的存在性证明，并且表示压根儿就不承认这是一种数学证明。希尔伯特当然不会向他退让半分，他坚定而有力地重新阐明了自己的观点，指出"在我们这门科学的历史发展中，纯粹的存在性证明始终是最重要的里程碑。"

希尔伯特十分看重存在性证明的意义，"存在"的概念渗透着他的思想，就是在日常生活中也时常表露出来。哈斯（H. Hasse，1898～1979）曾目睹这样一件小事。在莱比锡举行的德国科学家与医生协会的一次会议期间，一天夜里，希尔伯特和几位数学家、医生在一个酒店里相聚。谈话中，人们不时地问起"某地的某教授怎么样？他还活着吗？"当希尔伯特向一位同桌数学家问起同样的话时，这位数学家打算详细地介绍问起的那位教授的情况："是的，他在教……并且很关心……理论，他几年以前结了婚，有三个孩子，最大的一个……"刚说了几句，希尔伯特就打断了他的话，他优雅地告诉这位数学家："是的，但所有这些我都不想知道，我只想问他还存在吗？"

§2 拯救狄里克莱原理

科学思想的形成和确立具有历史的阶段性，这种阶段性特别表现为科学的发展是一个由潜科学到显科学的进化过程。潜科学作为孕育中的科学、不成熟的科学，往往具有一定的模糊性和不严密性，在一些具体细节上存在这样或那样的缺陷。这种模糊性和不严密性缺陷，在潜科学的进化过程中是难免的，谁要是固守常规，因潜科学的某种模糊性和不严密性而全盘否认它们的价值和存在的合理性，谁就会成为科学新思想的反对者和扼杀者。

科学史上不少学术名家，就是因为固守常规科学规范，对科学新思想求全责备而在重大发现面前成为反对者，成为压制科学新思想的保守者。这种憾事在数学史上是屡见不鲜的。1807年，富立叶向巴黎科学院呈交一篇关于热传导理论的论文，在这篇论文中，他建立了函数三角展开式系数的积分公式，提出了后来以他的名字命名的三角级数。科学院委托拉格朗日、拉普拉斯和勒让德审评这篇论文，他们没能认识到这篇论文的重大价值，却以级数的收敛条件缺乏严密的论述为由作了否定的鉴定。富立叶的这一创新思想由此被打入科学冷宫长达15年之久。

与拉格朗日等人的态度不同，希尔伯特不仅在显科学领域中富有独创，而且在潜科学版图上独具慧眼。他不拘常规，眼力深邃，善于发掘和辨识那些被埋没、被遗弃的潜科学。他的深邃的潜科学眼光，同样反映了他勇于创新，敢于破旧的反常规科学精神。他拯救被埋没多年的“狄里克莱原理”，使其从潜

科学的弃婴一跃而登上显科学的大雅之堂，就是生动的一例。

一　狄里克莱原理的由来

狄里克莱原理是微分方程位势理论和函数论的一条重要原理。它说的是，对于给定边界条件下的狄里克莱积分

$$D(u)=\iint_G\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy$$

存在着函数u，使积分$D(u)$达到最小值，并且这个函数满足位势方程（拉普拉斯方程）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0。$$

这一原理的重大价值，是把积分的极小值问题和位势方程联系了起来，为解决位势方程边值问题解的存在性问题开拓了一条全新的途径：求解位势方程的边值问题，可以化归为求积分的极小值问题，而后者往往是比较容易解决的。

狄里克莱原理其实并非为狄里克莱本人所首创。早在狄里克莱之前，1833年自修成才的英国数学家、物理学家格林(G. Green，1793～1841）在应用数学分析研究电磁力问题时，就以猜测的形式提出了三重积分情况下的狄里克莱原理，即对于积分

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$

存在着函数u，使积分具有极小值并满足位势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。$$

对于这一原理的可靠性，格林是基于物理上的直观而没有给出严格的数学证明。由于格林在当时学术界尚无名气，他的工作也就没能引起人们的重视。与格林几乎同时独立发现这一原理的还有德国的高斯和狄里克莱。出于慎重，高斯生前一直没有公开发表。1847年，格林的学生汤姆逊（W. Thomson，1824～1907）以较为普遍的形式把这一原理公诸于世，于是，这一原理在英国就以他的名字被学术界所知。在大陆，这一原理则是由德国的黎曼公诸于世的。

黎曼是高斯晚年的门生，是世界上少有的数学天才，他只活了39岁，一生是在艰苦和清贫中度过的。他给后人留下的论文并不很多，只够出一卷八开本著作，但是其意义却无可估量。以他的名字命名的数学术语有40条之多，如黎曼和、黎曼求和法、黎曼面、黎曼曲面、黎曼曲率、黎曼空间、黎曼问题、黎曼定理、黎曼猜想、黎曼积分、黎曼函数、黎曼矩阵、黎曼度量、黎曼流形、黎曼球面、黎曼联络、黎曼几何、黎曼可积的、黎曼上积分、黎曼下积分、黎曼伪度量、黎曼开拓定理、黎曼齐性空间、黎曼四指标记号、黎曼ζ函数、黎曼θ函数、黎曼p函数、黎曼映射定理、黎曼微分方程，等等。这如此众多的命名，几乎贯穿了数学的全部领域。

黎曼19岁的时候进入哥廷根大学，开始打算学神学，受高斯的影响，后改为攻读数学。在哥廷根学习一年以后，黎曼去柏林听课，此时正值狄里克莱在那里任教。在柏林的几年，黎曼深受狄里克莱思想的影响，两人结成了长期的友谊，狄里克莱原理就是他在课堂上学到的。1850年黎曼回到哥廷根，在高斯的指导下，于1851年11月完成博士论文“复变函数的一般理论的基础”。这是一篇非常出色的论文，受到高斯极高的评

价。高斯在评语中指出：

> “黎曼先生提交的论文令人信服地表明，作者对文中讨论的课题进行了深入和透彻的研究，表明作者能够进行创作性的、积极的、真正数学的思维，表明作者具有极其丰富的独到见解。文章的表述清楚、准确，有的地方十分优美，虽然段落的安排似乎可以更有条理些。但总的来说这是一篇很有份量、很有价值的文章，它不仅达到而且远远超过了对博士论文的要求。”

在这篇论文中，黎曼把单值解析函数推广到多值解析函数，引入黎曼曲面的重要概念，确立了复变函数论的几何理论基础，成为复变函数论的创始人之一。这篇论文中的许多重要结论，都是借助狄里克莱原理得到的。因为黎曼是从他的老师狄里克莱那里直接学到这个原理的，所以在论文中他给这个原理冠上了他的老师的名字。自此，这个原理就一直以狄里克莱的名字闻名于世。

二 狄里克莱原理的消失

黎曼的博士论文后来被认为是近代数学史上的一篇杰作，许多重要的思想都导源于它。但在当时，由于论文中某些地方不够严密而遭到一些人的指责，狄里克莱原理就是其中的一处。一贯以严密性著称的外尔斯特拉斯，针对狄里克莱原理的猜测性批评道：不经严格数学证明，就预先假定确实存着一个使积分达到极小值的函数，这在数学上是不允许的。作为一名数学家，黎曼清楚地知道，只有经过严格的数学证明，才能确保一个数学命题的可靠性。在没有找到这个证明之前，他却另

有想法。他认为，狄里克莱原理虽然还没有得到数学上的严格证明，但它是基于物理实验提出来的，一个适用于描述物理现象的数学结构一定是有意义的。他相信，虽然目前还无法给出这个原理的严格证明，但人们迟早会找到这个证明的。

1866年，年仅39岁的黎曼因患肺病而盛年早逝。1870年，外尔斯特拉斯给狄里克莱原理构造出一个反例。在这个反例中，对于给定的边界条件，使狄里克莱积分达到最小值的函数并不存在。这就从逻辑上否定了狄里克莱原理存在的合理性。

狄里克莱原理突遭否定，其价值一落千丈。为了弥补由此造成的损失，确保原来在它的基础上建立的各种定理的可靠性，数学家们不得不放弃它，去寻求证明这些定理的新的途径。如对位势方程边值问题解的存在性定理，数学家们找到了好几个不依赖狄里克莱原理的证明。其中著名的有：1870年，卡尔·纽曼（C. Neumann，1832～1925）给出“算术平均值法”；1890年，彭加勒给出“扫除法”；1892年，施瓦尔茨受外尔斯特拉斯工作的启示，给出“交替法”。这些证明虽然本质上达到了与黎曼同样的结果，但都不如从狄里克莱原理出发的证明简明、优美。

在有些问题上，数学家们抛开狄里克莱原理，甚至根本就达不到与黎曼同样的结果。如黎曼在他的博士论文的结尾，给出了函数论在保形映射的几个应用。其中给出了这样的一个定理：两个给定的单连通平面可以一对一地并且保形地相互映射，一曲面的一个内点和一个边界点可以对应到另一个曲面上的任意选取的一个内点和一个边界点。由这个定理可直接推得：给定任何一个单连通区域D，它的边界不止一个点，又给

定这个区域的一点A以及在这点的一个方向T，那么存在一个函数$w=f(z)$，在D内解析并保形地一对一地把D映射到w平面上中心在原点而半径为1的圆。在这个映射下A变到原点，T变到正实轴方向。后一个定理通常称为黎曼映射定理。黎曼在论文中是用狄里克莱原理来证明上述定理的。为了撇开狄里克莱原理，1870年，卡尔·纽曼和旋瓦尔茨分别给出了另外的证明方法，但他们的证明都有很大的局限性，只能证明：可以将一个单连通平面区域映射到一个圆，不能够处理多叶的单连通区域这种更为一般性的问题。

狄里克莱原理盛开之花的突然凋谢，直接影响到复变函数论和偏微分方程论等方面问题的研究，数学家们想彻底摆脱这个有毛病的原理，但一时又找不到合适的替代物。这不能不使许多数学家感到十分惋惜，卡尔·纽曼说："如此美而又有如此广阔的应用前景的狄里克莱原理，已经从我们的视线里永远消失了。"他的话代表了当时许多数学家的心理。

三　狄里克莱原理的复活

1899年，就在狄里克莱原理遭到外尔斯特拉斯否定整整30年之后，希尔伯特完成了他的名著《几何基础》的出版工作，接着便把注意力转向了"狄里克莱原理"这个联系着高斯、狄里克莱和黎曼等伟大人物的著名问题。

30来年数学家们早已放弃了挽救狄里克莱原理的一切希望，这个原理几乎在数学中完全销声匿迹了。可是希尔伯特却以他深邃的潜科学眼光，一反常态地关心起这个原理来，并且对它抱有很大的希望。他首先考察了狄里克莱原理的由来、作用及其被抛弃的历史过程。他高度称赞外尔斯特拉斯用严格的

逻辑分析来代替物理直观的启示，同时又不同意外尔斯特拉斯用常规科学的眼光对狄里克莱原理一笔勾销的作法。在外尔斯特拉斯等人看来，逻辑上的漏洞已使狄里克莱原理寿终正寝，再也无法挽救。可希尔伯特却透过这个原理内容的简明性和用场的广泛性，洞察到其生命还潜在地在搏动。正如他自己所说的，这个原理的“诱人的简明性和无可否认的丰富的应用可能性”，是与“它的内在的真实性”密切相关的。出于这种美和真相统一的思想，他充满信心地着手尝试狄里克莱原理的起死回生工作。

经过几个月的努力之后，希尔伯特终于找到了挽救狄里克莱原理的途径。他的基本思想是，把狄里克莱原理的范围作以适当的限制，对积分号内的函数u和狄里克莱积分$D(u)$，假定$D(u)$的下界为d，选择序列u_n，使得当$n\to\infty$时，$D(u_n)\to d$。由于被积函数$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$总是非负的，因此是有界的。对$u_n$本身虽然不能期望它收敛，但运用对角线法可得到一个处处收敛且一致收敛的子序列$\bar{u}_n$，这个子序列的极限就是所求的使狄里克莱积分极小的函数u。

1899年9月的一天，希尔伯特在德国数学联合会上报告了他挽救狄里克莱原理的工作，针对卡尔·纽曼的悲观情绪，他把这项工作叫作“狄里克莱原理的复活”。他在报告中指出：只要对问题中的边界值和允许函数的性质作以适当的限定，就可以消除外尔斯特拉斯的反例，恢复狄里克莱原理的真实性。他的论文包括引言在内不到6页，几分钟之后，听众们便弄清了他的出发点：回到问题的本源，回到原始概念的简明性。

问题的解决是如此地简单明了，使在场的数学家无不为之

惊叹。据当时亲自聆听过希尔伯特这一报告的一位美国数学家回忆，希尔伯特对狄里克莱原理妙手回春的处理，激起了“满场的惊叹和赞美”。克莱因赞赏地说：“希尔伯特成功地给曲面剪了毛”。两年以后，希尔伯特又给出了更为一般条件下的狄里克莱原理的证明，使这个原理的应用得到进一步扩充。后来，希尔伯特的学生柯朗完成了“关于狄里克莱原理的方法”等论文，进一步发展了这个原理及其应用。

希尔伯特对狄里克莱原理的起死回生工作，其意义远远超出了这个原理本身的存在价值。这项工作不仅恢复了黎曼学位论文应有的巨大声誉，而且引起了微分方程论和函数论一连串创造性的变革。受希尔伯特工作的启发，物理学家黎斯（W·Ritz）从经过修正的狄里克莱原理出发，发现了一个通过偏微分方程求边值问题数值解的强有力的方法。

狄里克莱原理沉浮的历史是值得深思的。其所以如此，是因为可把它作为某些科学思想由“潜”到“显”转化的一个缩影。

首先，这个缩影告诉我们，严格性对于科学创造固然十分重要，但如果把它加以绝对化，就会成为桎梏科学的无形阻力。王梓坤教授说得好：“在科学研究中，不仅需要学会严格，而且还要善于‘不严格’，过于严格只能循规蹈矩地前进，而善于‘不严格’却往往会取得出奇制胜的成功”。格林、汤姆逊、狄里克莱和黎曼等人，就是敢于和善于在“不严格”中取得成功的。假如前进的步伐要使原理的应用等待希尔伯特的完善工作，那么19世纪位势理论和函数论中的许多重大发现都要被延迟。

其次，这个缩影告诉我们，对孕育中的科学不能求全责备，要热心扶植它们，促进其成熟和完善。外尔斯特拉斯出自对数学命题严密性的常规要求，取消和否弃狄里克莱原理，看

来是无可非议的，然而他对科学新思想求全责备，一笔勾销的简单作法，却在客观上影响了这一原理由“潜”到“显”的转化。被外尔斯特拉斯驱入科学冷宫的狄里克莱原理，经希尔伯特发掘、改进和完善，又被重新请回科学的殿堂。这一“驱”一“请”，对于今天的学术名家打破常规，正确地辨识和评审那些尚不够成熟的科学新思想，积极促进它们由“潜”到“显”的转化，无疑会从正反两个方面提供有益的启示和借鉴。

§3 捍卫无穷集合的乐园

在科学研究中，反常规理论是伴随反常规科学精神而产生的一种具有极大创新性和革命性的理论。这种理论最显著的特征是，和传统观念、传统理论相悖逆，具有鲜明的反常性。反常规理论的这一特征，必然带来它的创立和发展的艰难曲折性，带来固守传统规范者对它的反对和抵制。因此，反常规理论的创立和发展，不仅需要它的创立者具有高度的反常规科学精神，而且需要具有反常规科学精神的人来支持和扶植。希尔伯特反常规科学精神的一个重要表现，就是在集合论创立最困难的时期，热情支持和扶植集合论的生存和发展，为捍卫无穷集合理论同保守势力进行了坚决的斗争。为了说明康托尔集合论的反常规实质及希尔伯特的反常规科学精神，我们先从集合论孕育的历史谈起。

一　集合论的孕育

集合论是研究集合的一般性质的数学分支学科，它的主要对象是无穷集合。早在集合论创立之前两千多年，数学家和哲

学家们就已经接触到了大量有关无穷集合的问题。公元前 5 世纪，希腊爱利亚学派的芝诺在研究运动和时间、空间的关系问题时，提出了一连串的悖论。其中著名的“两分法悖论”、“阿基里斯追龟悖论”、“飞箭悖论”，就与无穷集合问题有关。

在数学哲学上，有两种无穷方式历来为数学家和哲学家们所关注。一种是无穷过程，另一种是无穷整体。无穷过程是指永远延伸、永远完成不了的变程或进程，例如自然数到1，2，3，…，n，…。这种进程式的无穷称为潜无穷。无穷整体是指可以自我完成的无穷过程，即把无穷本身看作是一个整体，例如自然数全体组成的整体{1，2，3，…，n，…}。这种以整体形式出现的无穷称为实无穷。

亚里士多德最先提出要把潜无穷和实无穷区别开。他认为只存在潜无穷，而不承认实无穷。他举例说正整数是潜在无穷的，因为任何正整数加上 1 之后总能得到一个比它大的新数。对他来说，无穷集合这个概念是不存在，因为无穷多个事物或要素不能构成一个固定的整体。亚里士多德对数学本性所发表的各种看法对后人影响很大。他对无穷集合的否定态度，如同下了一道禁令，束缚后来的数学家长达两千多年，以至客观上延误了对无穷集合的深入研究。

例如，拜占庭的普罗克拉斯(Proclus，410～485)是欧几里得《几何原本》的著名评述者。他在研究直径分圆问题时注意到，一根直径分圆成两部分，两根直径分圆成四部分，n 根直径分圆成$2n$部分，由于直径有无穷多根，所以相应地必有两倍那么多的圆部分。换句话说，由直径数目组成的无穷集合{1，2，3，4，…，n，…}，与所分成的圆部分的数目组成的无穷集合{2，4，6，…，$2n$，…}，在元素上存在着一一对应的

关系。这实质上已经涉及到了无穷集合的一个基本特征：部分和它的整体可以建立起元素之间的一一对应关系。这种对应关系的存在，正是后来集合论赖以建立的基础。由于受亚里士多德潜无穷观点的影响，普罗克拉斯不肯承认无穷集合的存在，面对这种对应关系，他采取了回避的态度。他说："任何人只能说很大很大数目的直径和圆部分，不能说实实在在地无穷多的直径和圆部分"。

到了中世纪，随着涉及无穷集合的问题不断出现，部分能够同整体构成一一对应这个事实也就越来越明显地暴露出来。例如，数学家们注意到，把两个同心圆上的点用公共半径联起来，就构成两个圆上的点之间的一一对应关系。因为对于大圆上的任意一点A，通过公共半径，总可以找到小圆上的一点A'与它对应；反之，对于小圆上的任何一点B'，通过公共半径，总可找到大圆上的一点B与它对应。伽利略曾注意到类似的事实。他在1638年的《关于力学和局部运动两种新科学的对话和数学证据》一书中指出，两个不等长的线段上的点，可构成一一对应关系；他又注意到，正整数集合$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$可以和正整数的平方集合$\{1, 2^2, 3^2, \cdots, n^2, \cdots\}$构成一一对应关系。伽利略同样由于受传统有穷集合观念和亚里士多德潜无穷思想的束缚而没能正视这些事实，最后以"不合常识"为由否定了自己的发现。

在科学中常常发生这样的现象，一个新的事实虽然反复地出现在人们的面前，却长期找不到它的发现者。无穷集合就是这样的一个科学事实。甚至到了19世纪上半叶，绝大多数数学家还不肯承认无穷集合及其特殊属性的存在。他们自由地使用着无穷小、无穷大、无穷级数和极限过程，运用着自然数集、有

理数集、无理数集，以及实数集，毫无顾忌地说到直线上或平面上的任意点，然而却回避对无穷集合进行任何认真的讨论。就连负有“数学之王”盛名的高斯也不同意把无穷集合作为数学的对象来加以研究。他在1831年7月12日给朋友舒马赫（H. schumacher，1780～1850）的信中说道：“我反对把一个无穷量当作实体，这在数学中是从来不允许的。无穷只是一种说话的方式，当人们确切地说到极限时，是指某些比值可以任意近地趋近它，而另一些则允许没有界限地增加。

对分析学的奠基工作有过突出贡献的柯西，虽曾给出有名的极限定义，并对无穷级数有过深入的研究，但对无穷集合，他却如同他的前人一样，不肯承认它的存在。他认为，部分可以同整体构成一一对应关系，不过是一种逻辑矛盾。

17世纪最有影响的哲学家洛克（Locke，1632～1704）和斯宾诺沙（Spinnoza，1632～1677）等人也都对实无穷采取否定的态度。他们认为，无穷犹如上帝一样是不可理解的，任何想要确定与潜无穷不同的无穷量的企图都是注定要失败的。

纵观科学的历史，大凡一门科学理论在其创立之前，总是要有人充当它的先驱者。这些先驱者们的见解虽然往往并不完美，甚至含有漏洞和缺陷，但他们的工作对于新理论的建立却是十分必要的。对于无穷集合，最先洞察到它的重大意义，并沿着建立明确理论方向采取积极步骤的人，是捷克数学家波尔察诺（B. Bolzano，1781～1848）。

波尔察诺生于俄国圣彼得堡的一个商人家庭，在中学时代就对数学表现出浓厚的兴趣。他是最先明确承认并坚决维护提出无穷集合概念的人。他强调部分和整体能够建立起元素之间的一一对应关系，是无穷集合的一个本质特征。他把这种对应

关系称为等价关系。为说明这种等价关系的真实存在，他举出了大量事例。例如，在实数集〔0，5〕和实数集〔0，12〕之间可以建立一一对应关系，只须建立函数关系$y=\frac{12}{5}x$,其中x为〔0，5〕的任意元素，y为〔0，12〕的相应的元素。

波尔察诺作为布拉格大学宗教哲学教授，对于无穷集合的研究，其哲学意义比数学意义体现得还多。他提出和强调了有关无穷集合的某些重要概念和思想,但也存在许多模糊的认识。例如他提出超限数概念,然而对这一概念的理解却是不正确的，甚至错误地认为，对于超限数无需建立运算，因而不必去研究它们。波尔察诺的无穷集合思想，在他生前没有得到学术界的重视。他的重要著作《无穷的悖论》在死后两年才得以发表。

二　集合论的创立

在波尔察诺那里孕育起来的集合论思想，是在康托尔的手中发展和确立起来的。康托尔作为集合论的创立者，他的反常规思想对于现代数学发展有着极为深刻的影响。康托尔因创立集合论经受了同代人最严厉的审查和批判，他不顾众多数学家、哲学家、神学家的反对，为集合论的生存和发展同各种保守思想进行了始终不懈的斗争。可以说，集合论创立的历史，就是一部反常规理论在斗争中求得生存和发展的历史。

康托尔出生在俄国彼得堡的一个丹麦犹太血统的富商家庭中，兄妹6人，他是老大。父亲是福音派新教的信奉者，对康托尔有着强烈的宗教影响。1856年，康托尔全家迁居德国法兰克福。还在幼年时代，康托尔就表现有数学天才，决心成为一名数学家，康托尔的父亲希望自己的子女都能走上成才之路，

特别是对康托尔则寄以厚望。康托尔15岁时，父亲在一封信中对自己儿子的前途作了不可思议的预见：

"亲爱的乔治，一个人的前途和命运对他来说是隐藏在最深层的。没有人能事先知道他会陷于何等的困境中，也没有人能知道在生活的各个阶段将与怎样的不可预见的困难作斗争。"

"但是为避免在追寻事业成功的努力中由公开的或秘密的敌人的妒嫉和诽谤造成的困境，也为了克服各种艰难困苦，一个人首先必须获得最基本和最广泛的专业知识和技能。这对一个勤奋而有抱负的不甘被自己的敌人挤掉而退居二、三流的人来说就是绝对必要的。"

"你的父亲，或者说，你的父母以及在俄国、德国、丹麦的其他家人都在注视着你，希望你将来能成为科学地平线上升起的一颗明星。"

康托尔没有辜负父亲的忠告，他后来的科学生涯表明，他确实有一种为事业取得成功的强烈愿望和克服一切困难的坚定信念。康托尔17岁去苏黎世上大学，第二年转入柏林大学，外尔斯特拉斯、克隆尼克和库麦尔等著名数学家是他的老师。1866年，康托尔获得柏林大学博士学位。1867年任哈勒大学讲师，在朋友海涅的建议下，开始着手研究函数的三角级数展开问题。这一问题最初是由富立叶提出的，富立叶给出了以他的名字命名的函数三角级数展开式，但没有解决展开式唯一性的判定问题。富立叶级数展开式唯一性的判定，是19世纪数学研究的一个重要课题。也是一个极其困难的问题。在康托尔之前，对一些特殊类型的函数，在某些假定下的唯一性问题已经解决。海涅在1870年就发表了这样的一个定理：

一个至多有有穷多个不连续点的函数$f(x)$，在$-\pi$到π区间

可以唯一地表示成三角级数

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n}\sin nx + b_{n}\cos ny),$$

其中级数满足一般的一致收敛条件。

康托尔决定尽可能多地取消限制，使唯一性定理具有普遍性。1870年4月，康托尔给出了这样的唯一性定理。

如果一个实变量函数$f(x)$由一个对每个x的值都收敛的三角级数表示，那么这个表示法是唯一的。

这是康托尔对唯一性定理的首次推广。1871年，康托尔开始尝试将唯一性定理推广到允许有无穷多个不连续例外点的情况。此时，他认识到要做到这一点，必须首先研究这些例外点及其导集的构造性质。就这样，康托尔从早期的三角级数问题研究转而闯进了无穷集合这一古老而多争议的研究领域。1872年，康托尔为了证明无穷例外的三角级数展开唯一性定理，提出了极限点、导集、第一型集等概念。这篇论文隐含了集合论思想的萌芽，可作为集合论诞生前的征兆。1874年，29岁的康托尔在《克列尔杂志》上以标题“论所有实代数数集合的一个性质”，较全面地阐发了他的无限集合思想。这是历史上关于无穷集合理论的第一篇革命性论文。它的发表，标志着集合论的诞生。

康托尔称集合为一些确定的不同的东西的总体，对于这个总体，人们能够判断任何一个给定的东西是否属于它。他尖锐地批评了那些只承认潜无穷的人，驳斥了以往数学家和哲学家反对实无穷的错误论点。在他看来，如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应，它就是无穷集合。他区别了两种性质不同的集合：可列集和具有连续统的势的集。可列集是指那些能

和正整数集构成一一对应的集合，如有理数集和代数数集；具有连续统的势的集则是指与实数区间〔0，1〕等价的集，如无理数集和实数集。

早在1873年，康托尔就区分了这两种不同类的无穷集合。1873年11月，他在给数学家代德金的信中说道，他已经知道有理数是可列的，但对于实数集合是否可列，他还不能给出定论。几个星期后他成功地解决了这个问题。1873年12月7日，他写信告诉代德金，他已证得实数集是不可列的。代德金回信祝贺康托尔取得成功。康托尔的这项工作对于集合论的后来发展有着决定性的意义，因为集合论的许多原理都与可列集或具有连续统的势的集有关。

康托尔在取得最初的成功之后，就去尝试解决一些新的、更大胆的问题：一条直线上的点和整个R^n(n维空间)中的点的对应关系。他在1874年1月5日写给代德金的信中指出：一块曲面（比如说，一个包括边界在内的正方形）是否能够和一段直线（比如说，包括两个端点在内的一个直线段）一一对应起来，使得对于曲面上每一点都有直线上一个对应点。反之，对于直线上的一点，都有曲面上一个对应点。我想，回答这个问题并不是件容易事，尽管答案似乎显然是否定的，以至于证明看来几乎不必要。

康托尔原以为问题的答案是否定的，即直线上的点不可能和整个R^n中的点构成一一对应关系。可是，经过三年的尝试，他得到的答案却是肯定的。1877年6月20日，他写信告诉代德金，他已证得这样的对应关系是存在的。他说："我看到了它，但我简直不能相信它。"

在创立集合论的过程中，康托尔引进了基数、序数、超限

基数、超限序数等概念，并且规定了它们的运算。基数（也称势）是集合论的基本概念之一。它是对集合的元素在数量上的一种刻划。两个一一对应的集合具有相同的基数。对于有穷集合，基数就是这集合中元素的个数；对于无穷集合，康托尔引进了一个全新的提法。他用符号 $\aleph_0$（读作阿列夫零）表示自然数集的基数，用符号 c 表示实数集的基数。由于可列集与自然数集有一一对应的关系，所以它们的基数均为 $\aleph_0$；同样，与实数集有一一对应关系的不可列集的基数均为 c。

康托尔证得 $\aleph_0$ 和 c 有着特殊的运算性质

$$n\aleph_0=\aleph_0,$$

$$\aleph_0\aleph_0=\aleph_0,$$

$$nc=c,$$

$$cc=c,$$

$$c\aleph_0=c,$$

$$2^{\aleph_0}=c,$$

$$c>\aleph_0。$$

基数、序数等概念描述了无穷在层次上的质的区别，因而它们的建立是人类对无穷集合认识上的一次重大飞跃。这正如数学家古茨莫在1915年庆祝康托尔70寿辰时所说的，康托尔用这些数给数学开辟了一块“新地盘”。这块新地盘，就是以无穷集合为主要研究对象的集合论。

三　康托尔的遭遇

美国现代数学史家M·克莱因在评述集合论创立时期的状况时写道，“康托尔的集合论是在这样的一个领域中的一个大胆的步伐，这个领域，我们已经提过，从希腊时代起就曾断断

续续地被考虑过。集合论需要严格地运用纯理性的论证，需要肯定势愈来愈高的无限集合的存在，这都不是人的直观所能掌握的。这些思想远比前人曾经引进过的想法更革命化，要它不遭到反对那到是一个奇迹。”

反对的意见确实是耸人听闻的。康托尔的1874年的论文一问世，便遭到当时坚持传统的数学家们的激烈反对。其中反对得最激烈的是他的老师克隆尼克。在1874年之前，康托尔和克隆尼克的关系还很友好，克隆尼克曾热心帮助过康托尔简化1870年给出的三角级数展开式唯一性定理。可是当康托尔把唯一性定理扩广到允许有无穷多个例外点情况时，克隆尼克便开始成为康托尔的反对者。因为在克隆尼克看来，数学的对象必须是可构造出来的，不可用有限步骤构造出来的都是可疑的，不应作为数学的对象。他反对无理数和连续函数的理论，认为它们是不可构造的，因而是不存在的。同样，他指责康托尔的无穷集合和超限数理论不是数学而是神秘主义。

克隆尼克是一个语言刻薄，善于挖苦论敌的人。他连篇累牍地粗暴攻击康托尔的工作竟长达十几年之久。他认为“现代函数论和集合论没有任何真正的意义”，康托尔的思想会“使整整一代读过康托尔集合论那类骗人的鬼话的年轻数学家丧失信心”。康托尔于1872年27岁时任哈勒大学副教授，1879年提升为正教授。在当时，哈勒大学在德国只算得上二、三流的大学，薪金也很微薄。康托尔希望得到柏林大学教授的职位，而且自信有能力胜任，但由于一直遭到克隆尼克的百般阻挠，终生未能实现自己的心愿。在克隆尼克的连续攻击下，容易激动和神经过敏的康托尔经受不住刺激而身体垮了。从1884年起，他就不时地患着严重的抑郁病，常常住到疗养院里。1918年1

月6日，他在哈勒大学附属精神病院去世。

在当时，对集合论持有否定态度的有影响的数学家并不在少数，就连克莱因、彭加勒和外尔这样富有创见的数学大师也没能给康托尔的工作以任何支持。彭加勒把集合论比喻为“病态数学”，他批评说：“我们遇到某些悖论，某些明显的矛盾的事情已经发生了，这将使爱利亚学派的芝诺等人高兴，……我个人，而且不只我一人，认为重要之点在于，切勿引进一些不能用有限个文字去完全定义好的东西。”并且预测说：“后一代将把集合论当作一种疾病，而人们已经从中恢复过来了。”外尔则称康托尔关于基数$\aleph_0$的等级是“雾上之雾”。有人甚至把康托尔称为数学中的“疯子”和“叛徒”。

对于反对者的意见，康托尔是有所预料的。他虽然在精神上因经受不住攻击而常常受到折磨，甚至在疾病强烈发作时感到自己所干的工作是无聊的，但他在强烈发作过去后，最终总是能为自己寻找到新的力量源泉，重新振作精神，继续他的研究工作。他曾自述道：

“我的集合论研究的描述已经达到了这样的地步，它的继续已经依赖于把实的正整数扩展到现在的范围之外。这个扩展所采取的方向，就我所知，至今还没有人注意过。

我对于数的概念的这一扩展依赖到这样的程度，没有它我简直不能自如地朝着集合论前进的方向迈进那怕是一小步。我希望在这样的情形下，把一些看起来是奇怪的思想引进我的论证中是可以理解的，或者，如果有必要的话，是可以谅解的。实际上，其目的在于扩展或推广实的整数序列到无穷大以外。虽然这可能显得是大胆的，我却不仅希望而且相信，到了适当时机，这个扩展将被承认是十分简单、适宜而又自然的一步。

但我们是十分清楚，在采取这样一步后，我把自已放到了关于无穷大的流行的观点以及关于数的性质的公认的意见的对立面去了。”

康托尔的信念是坚定的，他始终相信，实无限“既具体地又抽象地”存在着。对此，他曾充满自信地说：“这种观点，我认为是唯一正确的，只有少数人才有。只要有可能，我在历史上就是第一个人十分明确地站在这个立场上，并接受其全部逻辑结论，我确切地知道我不会后继无人！”“我的理论犹如岩石一般坚固，任何反对它的人到头来都会搬起石头砸自己的脚……因为多年来，我从各方面，对它进行了考察，并对所有反对意见作了分析，更重要的是，我已追溯到这一理论最终无可怀疑的根源。”当集合论出现了悖论，加深了这一理论的灾难时，康托尔仍然没有动摇他的信念，他把悖论看成是一种建设性的东西，是对集合论的必要补充，而不是整个理论即将崩溃的信号。

康托尔为无穷集合的生存和发展奋斗了终生，就是在其患病期间，每当病情缓解时，他仍然坚持以书信的方式与朋友代德金、皮亚诺（G·Peano，1858～1932）等人讨论集合论的有关问题，人们常常看见他出入学术讨论会并热情洋溢地讲述自己的观点。他有句名言："数学的本质在于它的自由性。”在无穷集合面前，在传统数学观念统治着绝大多数数学家的时代，他就是采取了非常自由的思想方式。当死抱旧思想的人对他的工作加以责难时，他说出了上面那句名言。

四　集合论的坚决支持者

康托尔的工作之所以遭到怀疑和排斥，最根本的原因在于

他的思想的革命性和反常规性，超穷集合论从本质上背离了数学中关于无穷的传统观念，而这一点正是他同代人所难以容忍和接受的。集合论的创立使19世纪末数学家依据对于数学性质的不同看法，分裂成论战的双方。当时，站在康托尔一边的只有极少数远见卓识者，希尔伯特就是这样的少数人之一。他高度赞誉康托尔的集合论“是数学天才最优秀的作品”，“是人类纯粹智力活动的最高成就之一”，“是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。在1900年第二次国际数学家大会上，希尔伯特高度评价了康托尔工作的重要性，并把康托尔的连续统假说列为20世纪初有待解决的23个主要数学问题之首。

当康托尔的朴素集合论中出现了一连串灾难性的悖论，克隆尼克的后继者布劳威等人借此大作文章时，希尔伯特同他们的取消主义进行了坚决的斗争。

布劳威是继克隆尼克之后直觉主义的代表人物，在他看来，无穷过程是无法构造出来的，因此康托尔关于无穷集合的研究成果也就毫无任何价值，应统统弃之于数学大门之外。而集合论又是数学大厦赖于存在的基础，于是，按布劳威等人的作法，数学的大部分，凡是与无穷有关的内容，就会被砍掉，这是希尔伯特所决不能允许的。

1922年，在汉堡的一次会议上，希尔伯特针对布劳威等人扬言要取消康托尔的超限数，反对实数集合，以避免集合论悖论，指责他们是“通过错误的方法来寻求这个问题的解答”。他愤怒地抨击道：“外尔和布劳威的所作所为，归根结底，是在步克隆尼克的后尘！他们要将一切他们感到麻烦的东西扫地出门，以此来挽救数学……他们要对这门科学大砍大杀。如果听从他们所建议的这种改革，我们就要冒险，就会丧失大部分最

宝贵的财富！”

在直觉主义的计划中，希尔伯特看见了克隆尼克的阴魂，如果说克隆尼克是康托尔生前的坚决反对者，那么布劳威则是康托尔去世之后反对集合论最激烈的人。希尔伯特始终坚信布劳威的计划不会得逞，他说：“我相信，正如克隆尼克不能废除无理数一样，……外尔和布劳威今天也不可能获得成功。布劳威并不象外尔所相信的是在进行什么改革，他只不过是在重演一场已经有人尝试过的暴动，这场暴动在当初曾以更凶猛的形式进行，结果却彻底失败了，何况今日，数学王国已经是武装齐备，空前强固，因此，布劳威的新暴动，从一开始就注定要遭到同样的厄运。”正是为了克服集合论悖论带来的数学危机，从直觉主义的刀砍下把无穷集合理论挽救出来，希尔伯特转向了数学基础论研究。

1925年，在明斯特纪念外尔斯特拉斯的会议上，希尔伯特发表了题为“论无限”的著名讲演。在讲演中，他再次重申了他的数学形式化计划，阐述了这一计划迄今所取得的进展。他认为，关于数学基础论争的一个重要因素，是对无限缺乏全面而深刻的数学理解。他深有感触地说：“没有任何问题能象无限那样，从来就深深地触动着人们的感情；没有任何观念能象无限那样，曾如此卓有成效地激励着人们的智慧；也没有任何概念能象无限那样，是如此迫切地需要予以澄清。”作为康托尔思想的最坚决支持者，希尔伯特用坚定的语言向他的同代人宣布：“没有任何人能将我们从康托尔所创造的乐园中驱赶出去！”康托尔的集合论在当时的德国数学界实际上仍然是一个“禁果”，课堂上很少有人向学生讲授这方面成果。为了传播康托尔的思想，希尔伯特极力提倡向学生讲授集合论，使年轻

一代数学家成为集合论的支持者。

据说，为了传播康托尔的无限思想，希尔伯特还以有名的"无限多房间旅馆"的故事，用通俗的语言，形象而生动地阐明了无穷集合所特有的属性及其与有穷集合的质的区别。这个故事的内容大体上是这样：

某一家旅馆有无穷多个房间，房间号码为1，2，3，4，……。现在，所有的房间都住满了。这时，来了一位新到的旅客，坚持要住房间。如果这是一家房间数有限的旅馆，旅馆经理只好断然谢绝这位新旅客。可是，旅馆经理拥有无穷多个房间，于是他动了一下脑筋，请原有的旅客都依次住到下一号的房间，即1号房间的客人移住到2号房间，2号房间的客人移住到3号房间……其余类推。这就使1号房间空了出来，请新来的旅客住进去。

不久，又有一百个新旅客来到旅馆求宿。经理为了让他们住下，这回请原有的旅客依次移住到比现在所住房间编号大一百个号码的房间，即请1号房间的客人住到101号房间，请2号房间的客人住到102号房间，请3号房间的客人移住到103号，……其余类推。于是，1至100号房间空了出来，请新来的一百位旅客住进去。

第二天，有无穷多位旅客来到旅馆求宿，为了满足旅客的要求，这回经理请原有的旅客依次移住到比现在所住房间编号大一倍编号的房间，即请1号房间的客人移住到2号房间，请2号房间的客人移住到4号房间，请3号房间的客人移住到6号房间，……其余类推。这样一来，编号为奇数的房间就空了出来，它们是1号，3号，5号，7号，…。这无穷个空房间，自然可解决新到的这无穷多位旅客的住宿问题。

看来，来多少旅客都难不倒聪明的经理。有一天，康托尔教授来到了旅馆，他向经理提出一个问题：要是把区间〔0，1〕上每一点都占一个房间，是不是还能安排？

这一回，可把经理难住了，他绞尽脑汁，想尽各种方案，也没能安排下。康托尔告诉他，〔0，1〕区间上的点是另一种类型的无穷集合，他不象自然数集合那样可以按照顺序排成一串，因而也就无法和无穷多个房间构成一一对应关系。为了使经理明白一切想安排下的方案都是行不通的，康托尔给出了问题的对角线证法。

假设〔0，1〕区间中的实数都可以按照顺序排起来，如排成x_1，x_2，x_3，……那么就可用小数来表示这种排列：

$$
\begin{array}{l}
x_1:0.\ a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
x_2:0.\ a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
x_3:0.\ a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_k:0.\ a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

现在选一个实数$y=0.\ b_1b_2b_3\cdots$，使得

$$
b_k=\begin{cases}0, & \text{当}a_{kk}=1\text{时}, \\ 1, & \text{当}a_{kk}\neq 1\text{时},\end{cases}
$$

显然y不等于x_1，x_2，x_3，…中的任何一个数，因为对每一个x_k而言，至少有第k位小数值$b_k\neq a_{kk}$，即$b_1\neq a_{11}, b_2\neq a_{22}, b_3\neq a_{33}$，……。这就表明，〔0，1〕区间的实数是不可列（或不可数）的。

这个故事未必真的出自希尔伯特之口，但有一点是可以肯定的，这就是，希尔伯特总是喜欢用最通俗的方式宣传康托尔无穷集合的思想，因为他感到，彻底弄清无穷概念的实质的研究，不仅是数学，也是维护人类智力本身尊严的需要。

第三章　形式化数学思想方法

数学是一门极度抽象的演绎科学，极度的抽象性是数学区别于其它科学的显著特征之一。数学极度抽象性的重要表现形态，是它表述上的形式化。所谓形式化，是指用抽象的形式符号，去表述数学的概念、命题、演算和推理规则，从而把数学的直观的有内容的理论研究转变为抽象符号体系的结构和功能研究。数学的形式化是数学发展到一定成熟程度的必然产物，也是数学发展的需要。在数学形式化的历史进程中，希尔伯特的工作占有重要的地位。正确和全面地认识希尔伯特在数学形式化方面的工作，对于深刻领悟希尔伯特科学精神，继承和发展希尔伯特的思想方法，有着十分重要的意义。

§1　希尔伯特公理系统

希尔伯特在数学形式化方面的第一项重大贡献，是建立和完善形式公理化系统，并把它从几何学推广到数学的各个领域，使公理化方法发展到一个新的阶段。希尔伯特的这一重大贡献，集中体现在他的《几何基础》一书中。在这部著作中，希尔伯特不仅建立了完整的形式公理化系统，而且提出了运用形式公理化方法的原则。为了全面认识希尔伯特形式公理化思想的特点、实质及其在现代数学发展中的地位和作用，我们把他的工作放到历史的链条中去考察，而这个链条的发端，又可溯源到欧几里得的《几何原本》。

一　欧几里得的实质公理法

数学的公理法首先是在几何学研究中产生和发展起来的。在这方面最先迈出决定性一步的是古希腊数学家欧几里得(Euclid，约公元前330～公元前275)。欧几里得在综合整理前人数学研究成果的基础上，把亚里士多德的演绎法运用于数学，撰写出一部13卷本的巨著《几何原本》。这是一部科学史上最早运用公理方法构造科学理论体系的著作，它的问世，标志着初等几何已大体上完成由零散、片断的经验知识形态向有系统的理论形态的演化。

所谓公理方法，简单地说，就是从尽可能少的初始概念和初始命题（公理）出发，按照演绎推理规则，去定义其它一切概念以及推演出其它一切命题（定理）。运用公理法构造出的理论体系称为公理系统，它是由初始概念、公理、定义、定理等按演绎规则构成的数学系统。

为了构造几何学的公理系统，欧几里得在《几何原本》第一卷中，给出了23个初始概念的定义、5条公理和5条公设（只应用于几何学，现今统称为公理）。其中最重要的概念有（按原编号顺序）：

(1) 点是没有部分的那种东西。

(2) 线是没宽度的长度。

(3) 一线的两端是点。

(4) 直线是同其中各点看齐的线。

(5) 面是只有长度和宽度的那种东西。

(6) 面的边缘是线。

(7) 平面是与其上直线看齐的那种面。

……

（15）圆是包含在一（曲）线里的那种平面图形，使其从其内某一点连到该线的所有直线都彼此相等。

（16）于是那个点便叫圆的中心（简称圆心）。

（17）圆的一直径是通过圆心且两端终于圆周的任一直线，而且这样的直线也把圆平分。

……

（23）平行直线是这样的一些直线，它们在同一平面内，而且往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交。

5条公理是：

（1）跟同一件东西相等的一些东西，它们彼此也是相等的。

（2）等量加等量，合量仍相等。

（3）等量减等量，余量仍相等。

（4）彼此重合的东西是相等的。

（5）整体大于部分。

5条公设是：

（1）从任一点到任一点作直线（是可能的）。

（2）把有限直线不断循直线延长（是可能的）。

（3）以任一点为中心和任一距离（为半径）作一圆（是可能的）。

（4）所有直角彼此相等。

（5）若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。

最后一条公设，后人通常称为“欧氏第五公设”或“平行公设”、“平行公理”。

从这些定义、公理和公设出发，欧几里得在《几何原本》

中演绎推导出467个定理。

在欧几里得的《几何原本》中，几何学的研究对象点、线、面等是对现实世界特定直观实体的一种抽象，各条公理也是对现实世界中某些特定直观空间形式的一种抽象表述。这种公理系统虽然在形式上表现出高度的抽象性，但在内容上仍保留着明显的直观意义。我们把这种公理系统称为实质公理系统，与实质公理系统相对应的公理法称为实质公理法。实质公理法的模式是"对象——公理——演绎"，其主要特征是以现实世界特定的原型为其对象的直观背景，从对象及其相互关系中抽象出初始概念和公理。按这种公理法，公理的选择和确定应满足显而易见、"不证自明"的认识论要求。

《几何原本》是一部十分丰富的数学巨著，其内容除了几何知识外，还有比例和数论知识。这部宏伟巨著，对后人学习和掌握数学知识，了解和运用公理方法，培养和提高逻辑思维能力，起了极其重要的作用，成为千百年来世界广为流传的数学读物，其影响如此深远，以至欧几里得竟成了"几何学"的同义语。

但是，由于历史的限制，《几何原本》难免存在这样或那样的缺陷，有的还很严重。总的看来，主要表现在：

第一，定义不够恰当。"点"、"线"、"面"应是不加定义的初始概念，但欧几里得却对其作了没有明确数学内容的定义，而且这些"定义"，实际上不过是对"点"、"线"、"面"物理属性的直观描述。

第二，公理不完备。例如，用了运动的概念，却没给出运动公理；用了连续的概念，却没给出连续公理；用了"……在……中间"的概念，却没给出顺序公理。

第三，证明有漏洞。有些证明含有错误，有些证明是使用归纳法由特殊来推演一般性结论，因而在逻辑上不可靠。

纠正《几何原本》中的缺点，完善欧几里得几何公理系统，是历代数学家长期认真关注的问题。这项工作历经二千多年，一直延续到希尔伯特时代才告结束。

二 非欧几何发现的冲击

欧几里得《几何原本》为数学研究提供了重要的方法论，它所运用的公理化方法成为数学的有力工具。然而，实质公理法把数学看作是对于某些特定对象的研究的观念，却无形成为数学继续发展的一种阻力。这特别表现在非欧几何的发现上。非欧几何发现是续欧几里得几何以后几何学中的一场革命，它丰富、发展了几何学，也动摇了数学是对某些特定对象研究的传统观念，从而为打破实质公理法的传统模式，建立新的现代公理法，从认识论和方法论上提供了重要的突破口。

非欧几何渊源于对欧氏第五公设的研究。第五公设在《几何原本》中占有特殊的地位，它是有关相似形、圆和面积等理论的基础。对于这条公设，一开始就引起了数学家们的注意。其一，它的意义含混，语句冗长，远不如前面几条公设那么简洁明了、不证自明；其二，在《几何原本》中用到它的时候很迟，直到第29个命题的证明才第一次用到它，以后又很少用到。于是，数学家们便怀疑，可能第五公设本来就不是一个逻辑上独立的初始命题，只是因为欧几里得没能给出它的证明，才不得不把它放在公设之列。这种疑问很自然使数学家们产生了证明第五公设的企图，以满足公理法对公理的个数尽可能少的要求。

从公元前3世纪开始，到19世纪初非欧几何问世，在长达两千多年的时间里，几乎所有历代数学家都认为第五公设是一个可证的命题，并且坚信迟早会找到它的证明。历史表明：凡是《几何原本》传播到的国家和地区，都曾有人带头尝试过第五公设的证明。其中比较著名的有：

希腊的阿基米德（Archimedes，约公元前287～前212）、波西道尼（约公元前135～公元前50）和托勒玫(C. Ptolemy，约100～168）。

拜占庭的普罗克拉斯、阿卡尼西（约5世纪）和西姆波利基（约6世纪）。

巴格达的阿尔·伽哈利(约9世纪)和伊宾·柯列（约9世纪）。

伊朗的安·耐利子（约10世纪）、阿尔·卡西（Al—Kâshî，？～1436）、伊宾·西思（980～1037）、奥玛尔·海雅姆（O. Khayyam，1048～1131）和那西尔·艾丁（Nasîr-Eddin，1201～1274）。

埃及的阿尔·海萨姆（Al-Kaitham，965～1039）。

西班牙的阿尔·瓦拉德里（A. D. Valladolid，1270～1346）。

意大利的格列绍卡诺（F. B. Grisogono，1472～1538）、科曼地诺、卡塔利特（P. A. Cataldi，1552～1626）、焦尔达诺（V. Giordano，1633～1711)和萨开里(G. Saccheri，1667～1733）。

英国的华利斯和普列菲尔（J. Playfair，1748～1819）。

法国的克雷洛、达朗贝尔（J. L. R. D'Alembert，1717～1783）、拉格朗日、卡诺、拉普拉斯和勒让德。

瑞士的兰伯特（J. H. Lambert，1728～1777）。

德国的什外卡尔特（F. K. Schweikart，1780～1859）和塔乌里努斯（F. A. Taurinus，1794～1874）。

匈牙利的法·鲍耶（F. Bolyai，1775～1856）。

俄国的古利耶夫（C. E. Guliyeve，1764～1813）和布尼亚科夫斯基（B. R. Bunieakefsky，1804～1889），等等。

非欧几何的发现者高斯、亚·鲍耶（J. Bolyai，1802～1860）和罗巴切夫斯基，也都曾在他们的工作初期寻求过第五公设的证明。

有人曾作过统计，历史上关于试证第五公设的论著，至少达250多部（篇）。

尽管历代数学家付出了极大代价，第五公设的证明却始终没能找到，这不能不说是向人类智慧的一种挑战。对此，法国著名数学家达朗贝尔把它称为“几何学中的家丑”。然而，失败者的工作并非完全是徒劳无益的。正是在他们的长期失败中，一种全新的几何学逐渐萌发、孕育起来了。

在18世纪之前，数学家们试图从欧几里得的其它公设出发，直接推导出第五公设来。这段试证的历史可称之谓直接证明阶段。到了18世纪，直接证明的长期失败，启发人们改用间接证明方法，即运用解决复杂数学问题所常用的一种方法——反证法。18世纪的许多数学家都这样尝试过，其中具有代表性的人物是意大利的萨开里和瑞士的兰伯特。

萨开里是一个耶稣会教士兼大学教授，他曾仔细研究过前人对第五公设的各种证明方法，特别是伊朗的那西尔·艾丁和英国的华利斯的工作，并构造了自己的间接证明方法。他以含有两个直角和两个相等对边的四边形为基本图形来进行证明，后人把这个四边形称之为“萨开里四边形”。

萨开里在逻辑推演中得到了一连串“离奇古怪”的命题，如“存在相互渐近的两条直线，它们在无穷远处有一公垂线和斜线”，“对于同一条直线，存在着不相交的垂线和斜线”，等等。他相继推得40多个类似的古怪命题。这些命题实际上是属于非欧几何的，是非欧几何的一种潜在形态。它们后来都被包括在罗巴切夫斯基等人创立的非欧几何理论体系中。萨开里本来并没有找到真正的逻辑矛盾，但他却从直观上以“不合情理”为由否定了这些命题，并自认为由此成功地运用反证法证明了第五公设。1733年，他发表了《消除了一切污点的欧几里得》一书，声称自己证明了第五公设。无疑，萨开里的证明是失败的，但在他的证明中却萌发了非欧几何的命题。从这个意义上讲，可以称他为非欧几何创立的先驱者。

从萨开里的失败证明中萌发出来的非欧几何命题，在兰伯特的工作中得到了进一步的孕育。兰伯特生于一个裁缝家庭，当过小职员和家庭教师。后来成为柏林科学院院士。他研究平行线的理论，受萨开里等人思想的启发，提出了自己的一个证明方法。这个方法的特点是，以含有三个直角的四边形为基本图形，后人把这个四边形称为“兰伯特四边形”。

兰伯特和萨开里一样，在逻辑推理过程中得到一连串相当古怪的命题，但他没象萨开里那样受直观的支配轻率地把它们一笔勾销，而是极力寻求新命题之间可能存在的逻辑矛盾。但是，他始终未能达到目的。兰伯特的几何观点是比较先进的。他清醒地认识到，任何一组假设如果不导致矛盾的话，就可提供一种逻辑上可能的几何，不管它的命题显得是如何的反常。兰伯特虽然承认可能存在一种新的几何，但他却未能对这种几何的现实性提出任何见解，因此也就未能再向前迈进一步。

萨开里和兰伯特本来已经接触到了非欧几何的某些命题，然而，由于他们深受传统几何观念和空间概念的束缚而丧失了发现新几何的契机。这在客观上无疑延迟了非欧几何的诞生。而这种“延迟”于19世纪初在什外卡尔特和塔乌里努斯叔侄手中又以另一种形式发生了重演。

什外卡尔特是一位法学教授、业余数学家。1807年，他曾发表一篇证明第五公设的论文，不久便发现了这一证明的错误。1812～1816年，他曾受聘到俄国的哈尔科夫大学教法学，余暇时间悉心研究平行线理论。在这期间，他得到许多有关新几何的命题，并写了一篇“星空几何”。1817年回到德国之后不久，便把自己的这篇札记寄给高斯，请他审核。在这篇札记中，什外卡尔特提出，除通常的欧几里得几何外，还存在另外一种几何，在这种几何中三角形的内角和小于两直角。他把后一种几何称为星空几何，因为它有可能在星际空间成立。高斯在回信中对什外卡尔特的工作表示致意，但他没有鼓励什外卡尔特继续探究下去。什外卡尔特由于缺乏必要的数学素养，又得不到名家的指教，最终不得不放弃了对新几何的研究。

塔乌里努斯继承其叔父的思想接着研究星空几何，他得到一系列新的重要定理，并撰写出关于新几何的两本小册子。1824年，他把自己的著作寄给高斯征求意见。高斯在同年11月8日的回信中，对塔乌里努斯的成果给予了充分肯定，顺便对新几何的本质和意义谈了几点看法。为了谨慎起见，他在信的结尾处告诫塔乌里努斯，在任何场合都不得把信的内容泄露给外界。

1825年，塔乌里努斯出版第一本小册子《平行线论》，次年又出版第二本小册子《几何学基本原理》。在第一本小册子

的前言中，他有意暗示，“欧洲数学之王”曾对新几何有过一段告白。高斯得知此事十分恼火。由此中断了与塔乌里努斯的任何书信往来。塔乌里努斯失去高斯的信任和支持，心情极为不安，不久便患了严重的神经失常症。在一次发病厉害时，他把自己的小册子都烧掉了。塔乌里努斯的研究成果虽然没有引起当时学术界的注意，并且中途遭到夭折，但是他的工作却在客观上促进了新几何的孕育。作为非欧几何的先驱者，什外卡尔特和塔乌里努斯的名字，将和非欧几何发现者的名字一起载入科学的史册。

在科学发展中常出现这样的现象：一些成熟了的科学结论和观点几乎同时地和独立地为不同的学者所获得。例如，笛卡儿和费尔马（R. Fermat, 1601～1665）同时确立起坐标几何思想，牛顿和莱布尼茨（C. W. Leibniz, 1646～1716）同时大体上完成微积分的发明，等等。这种“同时性”现象的出现并非偶然，因为科学思想的形成本来就有自己的历史进程，它们总是在条件成熟了的时候应运而生。对于非欧几何，同样地有三位数学家分享了它的发现者的荣誉：德国的高斯、匈牙利的亚·鲍耶和俄国的罗巴切夫斯基。

高斯在中学时代就熟悉第五公设问题及其前人的工作。1792年，当他15岁时，已经有了第五公设不可证和非欧几何的思想萌芽。以后相继得到许多这方面的重要成果。但他动摇、徘徊了25年之久，直到1817年才牢固树立起坚定信念。他最初把这种新几何称之为“反欧几何”，后称“星空几何”，最后称“非欧几何”。

在非欧几何发现面前，高斯内心充满着深刻的矛盾，一方面珍惜自己的新几何思想和已获得的研究成果，“不想让这些

成果随自己而一起泯灭”。另一方面又担心在传统欧氏几何观念占统治地位的时代这些成果的发表会引起“马蜂在头上飞舞”和“愚人的喊叫”。他生前一直没有公开发表自己在非欧几何方面的研究成果，只是把它们整理记载在日记中。高斯发现了几何学的新大陆，并有足够的力量和智慧去耕耘它，可是由于考虑到自己已取得的显赫地位和名声，使他不敢大胆地进入这块未知的土地。这不仅在客观上延误了新几何的传播和公认，而且严重地限制了他在非欧几何研究上所能达到的高度。

亚·鲍耶是匈牙利的一名军官，业余数学家。其父法·鲍耶是高斯的同学和好友，曾和高斯在一起研究第五公设问题，但毫无收获。亚·鲍耶在维也纳皇家工程学院学习期间，就醉心试证第五公设，并一度相信取得了成功。不久，他便意识到第五公设的证明是不可能的，由此转向这个“不可能性”的证明。法·鲍耶得知自己的儿子致力于研究第五公设问题，十分震惊，极力劝阻他停止这项工作。亚·鲍耶不顾父亲的反对，坚持研究下去，终于作出非欧几何的发现。1823年11月23日，他激动而充满信心地写信告诉父亲：“我已从乌有创造了另一个新奇的世界”。这个新的世界就是非欧几何。他把新几何称之为“绝对几何”。1832年，他把自己的研究成果写成论文“绝对空间的科学”，以父亲的书《为好学青年的数学原理论著》的附录形式作为公开发表。

《附录》共26页，除标题和正误表外，正文仅24页。这篇简短的附录，使亚·鲍耶名垂青史。关于非欧几何的研究成果，除这篇附录外，亚·鲍耶在1851至1858年间还写了两份材料：一份是对罗巴切夫斯1849年的论文“平行线理论的几何研究”的评论，另一份是“关于空间的学说”。这两份材料是在

他去世之后被人发现的。

在科学中并非所有新理论的创立者在确立这种新理论时都起着同样的作用，非欧几何创立者的功绩同样也不是等同的。高斯不肯在生前公开发表自己的新几何思想，只是以日记的形式留给后人去发掘；亚·鲍耶虽然大胆地公开发表了自己的几何革命思想，但没能全面、深入地展开它。非欧几何的创立，就发表成果时间之早，论述的完整、深入，内容全面、丰富，以及捍卫新几何之坚决、彻底，要算罗巴切夫斯基。

罗巴切夫斯基是从1815年着手研究平行线理论的。开始，他也是循着前人的思路，试图给出第五公设的证明。在保存下来的他的学生的听课笔记中，就记有他在1816～1817学年度几何教学中给出的证明。可是，他很快就意识到这条道路是行不通的。前人和自己的失败从反面启迪了他，使他开始思索问题的相反提法：第五公设是一个逻辑上不可证明的命题。这是一条大胆的，也是与传统思路相背离的反常规思路。正是沿着这条思路走下去，罗巴切夫斯基发现了非欧几何。

在这里，罗巴切夫斯基和萨开里、兰伯特一样，也使用了反证法。但他和萨开里、兰伯特的出发点不同。他的出发点是证“第五公设不可证”，由这个出发点，首先对第五公设加以否定，然后从这个否定命题和其它公理进行逻辑推演。如果在推演过程中出现了逻辑矛盾，就说明第五公设与其它公理在逻辑上相关，即第五公设可由其它公理推演出来，它不是一个逻辑上独立的命题；如果推演不出逻辑矛盾，就说明第五公设与其它公理在逻辑上不相关，即第五公设是一个逻辑上独立的命题。通过实际推演，罗巴切夫斯基没有发现逻辑矛盾。于是，他同时得到了两个重要结果：一是第五公设不能证明；二是从第五公

设的否定命题出发可以展开一个新的公理系统，他把这个新的公理系统称为“想象几何”，后人称之为罗巴切夫斯基几何。

罗巴切夫斯基的这项工作是在1824～1826年间完成的。1826年2月23日，他在喀山大学物理数学系报告了自己的新几何研究成果。这一天已被公认为非欧几何的诞生日。后来，他又发表了一连串有关非欧几何的论著：《几何学原理》（1829年），《想象几何学》（1835年），《想象几何学在一些积分上的应用》（1836年），《几何学的新原理及完整的平行线理论》（1835～1838年），《平行线理论的几何研究》（1840年），《泛几何学》（1855年）。

罗巴切夫斯基的几何创新思想是与传统几何和空间观念背道而驰的，因而没能得到同时代人的接受和承认。他的1826年的报告手稿竟被喀山大学“三人专家小组”丢失；1829年的论著遭到彼得堡科学院院士、数学权威奥斯特洛格拉茨基（M. Ostrogradsky，1801～1862）的诋毁和否定，被认为“谬误连篇，不值得科学院的注意”。《祖国之子》杂志出于对科学进步的仇恨，对他的新几何学进行了恶意诽谤，称罗巴切夫斯基的工作是“对几何学的讽刺”、“几何学漫画”，是“把黑的想象成白的，把圆的想象成方的”，等等。

非欧几何诞生于19世纪20年代，但对它的承认却是40多年之后的事情。1868年，意大利数学家贝尔特拉米（E. Beltrami，1835～1900）发表“非欧几何解释的尝试”。他指出，罗巴切夫斯基的非欧几何学可以在恒定负曲率的曲面，例如拟球曲面上实现，即非欧几何的命题可以“翻译”成欧氏空间曲面的命题。由于人们在长期实践活动中相信欧几里得几何是无矛盾的，因而也就自然相信非欧几何也是无矛盾的。1871年和1882

年，克莱因和彭加勒又分别给出了非欧几何在欧氏空间的另外两种模型。贝尔特拉米等人的工作立即改变了数学家对非欧几何的态度，非欧几何及其创立者的工作由此得到人们的普遍赞美和承认。时至此时，非欧几何才大体上完成在历史上的系统发育，由“潜科学”演变成“显科学”。

非欧几何的发现，是数学思想史上具有革命性的重大事件，它的意义不只在于解决了第五公设问题，开拓出了几何学的一片新天地，更重要的是引起数学思想方法发生了根本性的变革。

首先，非欧几何发现之前，人们一直把欧氏几何看作是唯一可能的几何理论，认为它是关于空间特性的绝对真理，甚至到了19世纪中叶，受这种传统数学观念影响，英国数学家德·莫根（A. DeMorgen，1806～1871）还把欧氏几何奉若神明，他坚持认为：“任何时候都不会存在与欧几里得几何本质上不同的另外一种几何”。连不少著名的文学家也反对非欧几何。如德国诗人哥德（J. W. V. Goethe，1749～1832）在他的名著《浮士德》中写下了这样的诗句：

有几何兮，
名曰“非欧”，
自己嘲笑，
莫明其妙！

非欧几何的确立打破了欧氏几何这种一统数学天下的局面，它表明，欧氏几何不过是若干种可能的几何理论中的一种，和所有科学理论一样，也只有相对的真理性。这就为几何学开辟了单一化向多样化发展的新方向。

其次，通过变更第五公设而发现非欧几何，这本身就具有重要的方法论意义。它表明，当作为一种理论基础的公理被变

更时，可以显露出各种理论的不同发展的可能性。也就是说，在一个公理系统中，可以把一个公理换成与其相反的命题而得到一个新的公理系统。这就为人们深入研究数学的逻辑结构，提供了重要的方法论。事实上，正是受这种方法论的启示，数学家们进而又建立了黎曼几何学和非阿基米德几何学等各种新的非欧几何理论。

第三，欧氏几何是在人们的生产和生活实践的基础上总结、概括出来的数学知识，它的内容具有明显的现实背景。可是非欧几何作为数学内部自身矛盾运动的产物，却不象欧氏几何那样直接依赖于人们的感性直观，甚至与人们的感性直观相背离。这就意味着，当数学发展到一定阶段时，某些数学理论的逻辑结构，不再受经验认识的约束，可以在抽象的理论层次上直接建立起来。这就进一步提高了数学发展的相对独立性。

第四，用模型法证明非欧几何相对于欧氏几何的无矛盾性，使模型法成为一种重要的公理方法。对非欧几何相对欧氏几何无矛盾性的各种模型解释表明，对同一个公理系统可以作出不同的模型解释，这就打破了一个公理系统只有一个论域的传统数学观念，为形式公理系统的产生准备了必要条件。

总之，非欧几何比欧氏几何具有更高的抽象性，它已经摆脱了传统几何的直观性约束，其内容虽然还有特定的空间意义，但形式化程度却比欧氏几何大大提高了。非欧几何的创立，不仅引起了人们对空间形式的认识发生了飞跃，而且为公理化方法的进一步发展开拓了新的道路。

三　希尔伯特的形式公理化思想

科学思想的演变既表现有飞跃和突破，又表现有历史的连

续性和继承性。继非欧几何发现之后，沿着形式公理化道路第一个作出较大贡献的人，是德国的帕什（M. Pasch，1843～1930）。他的形式公理化思想集中体现在他在1882年发表的《新几何学讲义》一书中。

我们知道，形式公理化思想的一个显著特征，是把数学的对象高度抽象化，使数学摆脱物理直观的束缚。帕什的思想明显具有了这一特征。帕什提出，数学的初始概念是不定义的而且也是不要求定义的，否则，或者定义的过程会无穷无尽，或者数学就会依赖于物理的直观而丧失其抽象性，“点”、“线”，“面”等就是一些不定义的初始概念。他提出，初始概念虽然不加定义，但它们的性质和特征必须由公理表述出来，公理可以看作是初始概念的隐定义。

对于公理的要求，帕什的观点也是富有见地的。他认为，公理虽然最初是由经验所提供的，但一经选定之后，就不再依赖于经验而具有独立的意义。自欧几里得时代以来，人们一直把公理看作是“不证自明”、显而易见的真理，数学家们之所以对试证第五公设表现出如此巨大的热情，也正是由于它不那么“不证自明”、显而易见。帕士强调，数学中的公理决不是指那些“不证自明”、显而易见的真理，而是用以产生一门数学理论的一些初始假定，这些假定确立了初始概念的性质及其相互之间的联系。

帕什在他的《新几何学讲义》中还指出：“几何学要成为一门真正演绎的科学，那么必不可少的是：作为推理的方式既要与几何概念的定义无关，又要与图形无关；需要考虑的全部东西只是由命题和定义所断言的几何概念之间的联系。”在帕什看来，公理方法既不需要图形的直观启示，也不需要考虑几何概念的实际物理意义，而是应该循着纯逻辑推断的途径完成

所有的证明。这已经初步体现了形式公理化的思想。

为了实现新的公理观念，帕什在其《新几何学讲义》一书中，没有给"点"、"线"、"面"下定义，它们的属性是通过给出的公理揭示的。为了弥补欧几里得几何公理系统初始命题的不足，帕什给出了点对直线和平面的从属公理、点和直线的相对顺序的顺序公理以及著名的帕什公理。帕什是第一个建立直线上点的顺序公理的人。高斯曾注意到欧几里得几何公理系统缺少顺序公理，在1832年3月6日给朋友法·鲍耶的信中他指出："在完全的阐述中，诸如，'在……之间'那样的词必须建立在清晰的概念上，这是能够做到的，但我在任何地方都没有看到过。"高斯没有提出如何去弥补欧几里得几何公理系统的这个缺陷。

帕什的公理系统虽然比欧几里得的公理系统先进得多，而且在一定程度上体现了形式公理法思想，但他给出的公理系统很不完备，有的公理不必要，有的必要的公理没给出。

在历史上，数学的形式化和逻辑的形式化是同时进行和展开的。继帕什之后，意大利逻辑学家皮亚诺和他的学生们，在符号逻辑的研究中，对几何公理法的发展也作出了重要贡献。皮亚诺在《数学公式》一书中发明了一整套数学符号，并试图用符号表示全部数学内容。如他用"$\in$"表示"属于"，"$\supset$"表示"包含"，"No"表示"自然数集"，"a^+"表示"后继于a"等。为了宣传自己的发明，他在课堂上也时常使用这些符号，可学生们对这些抽象的形式符号并不感兴趣，他们对皮亚诺的讲课很不满意，以至他不得不被迫辞去图林大学的教授职位。

作为一名数理逻辑学家，皮亚诺把符号逻辑的语言应用到几何学，试图使几何学变成符号演算系统。在1889年的《逻辑

地叙述的几何基础》一书中，他给出了自己构造的几何公理系统。然而，这个公理系统同样是不完备的，而且没有明确形成系统的公理化思想。

皮亚诺的学生皮埃里（M. Pieri,1860～1913）在1899年《作为演绎系统的初等几何学》一书中，独创地建立了欧几里得公理系统。他试图采用更少个数的初始概念，以至把初始概念减少到两个：“点”和“运动”。在他那里，直线和平面是借助“点”和“运动”定义的。这种作法实际上并没有达到使几何公理系统简单化的目的，反而把公理系统弄得十分复杂，由于初始概念太少，许多公理的陈述不得不过于冗长，许多逻辑关系也显得杂乱无章。

实质公理法向形式公理法的过渡，是在希尔伯特手中全面完成的。希尔伯特的形式公理法思想，集中地体现在他的《几何基础》一书中。这本书出版于1899年，最初发表在哥廷根庆祝高斯——韦伯塑像落成的纪念文集上。1962年，为纪念希尔伯特诞生一百周年，出版了第9版，1977年高斯诞生二百周年时，出版了第12版，足见这部书影响之深远。

希尔伯特的形式公理法思想的萌芽，可追溯到1891年他还是哥尼斯堡大学的一名讲师的时候。这一年的9月末，他在哈勒举行的自然科学家大会上听了赫尔曼·维纳（H. Wiener）的讲演：“论几何学的基础与结构”。维纳对几何学基础研究状况的介绍，对几何实质的抽象观点，深深地打动了希尔伯特的思想。就在返回哥尼斯堡的路上，希尔伯特在柏林车站若有所思地对同伴们说：在一切几何命题中，“我们必定可以用桌子、椅子和啤酒杯来代替点、线、面。”在这种朴素的想法中，已经孕育了形式公理化思想。

当时，希尔伯特正忙于不变量理论和数论研究，一直到1898年，他才把精力转向几何基础研究。在1898年～1899年冬季学期开设的《几何基础》讲座中，希尔伯特系统阐述了他的公理化思想。此时，哥廷根大学正在筹备6月份高斯——韦伯塑像的落成典礼，克莱因请希尔伯特把他的《几何基础》讲稿刊登在《纪念文集》上。就这样，从1891年开始思索几何基础问题，到1899年全力以赴开展这项工作，历经9年的酝酿和孕育，希尔伯特终于完成了他的经典性著作《几何基础》。

希尔伯特继承了伯什和皮亚诺等人的抽象公理化思想，但又没有沿着他们的抽象符号化的方向继续走下去，没有采用纯逻辑的符号语言来取代传统的自然语言，而是将抽象的观点与具体的自然语言创造性地结合起来，通过"旧瓶装新酒"的方法，在欧几里得几何的古典框架内，提出现代的公理观点。为了构造几何的公理系统，揭示几何学的实质，他又回到了欧几里得的"点"、"线"、"面"，回到了点、线、面的那些关系。然而，他并没有简单地回复到欧几里得时代，而是给公理思想赋予了全新的内容。

首先，希尔伯特给出的初始概念是不加定义的，这些初始概念可分为两种类型。

一种用于描述几何学的对象，它们分别叫作"点"、"直线"和"平面"。这些对象不再具有任何直观上的意义，而只是一种形式上的语言符号。

另一种用于描述对象之间某种特定的相互关系，分别用"关联"（"在……之上"、"属于"）、"介于"（"在……之间"）、"合同于"（"相等于"、"全同于"）等词来表示。这些关系同样不再具有任何物理意义，不再是现实世界中某种特定关系

的直接反映。

总之，所谓“点”、“直线”、“平面”和所谓“属于”、“介于”、“合同于”诸关系，指的是只知道满足某些规定的对象和关系，这些规定是通过公理来刻划的。

其次，希尔伯特给出了表达初始概念整体结构的公理，它们分为五组共有20条。

第一组　关联公理

（1）过A和B两点有一直线a。

（2）过A和B两点至多有一直线a。

（3）每一条直线上至少有二点，至少有三点不在同一直线上。

（4）过不在同一直线上的三点A、B和C必有一平面α。在每一平面上至少有三点。

（5）过不在同一直线上的三点A、B和C，至多有一个平面包含这三个点。

（6）如果一直线的两点在一平面α上，则该直线的每一点都在α上。

（7）如果两个平面α和β有一公共点A，则它们至少还有另一公共点B。

（8）至少有四个点不在同一平面上。

第二组　顺序公理

（1）若点B在点A和点C之间，则A、B和C为一直线上的三个点，且B也位于C和A之间。

（2）对任意两点A和C，至少有一个点B在AC上，使得C在A和B之间。

（3）直线上的任意三点中，至多有一点位于其它两点之

间。

(4) (帕什公理)　设A、B和C三点不在同一直线上，又设直线a位于A、B、C三点的平面上，但不通过A、B或C。如果a通过线段AB上的一个点，则a必通过线段AC上的一个点或线段BC上的一个点。

第三组　合同公理

(1) 如果A、B为一直线a上的两个点，A'为直线a上或另一直线a'上的一个点，则在A'的给定一侧必可在a或a'上找到一点B'，使得线段$A'B'$合同于AB。记为$AB \equiv A'B'$。

(2) 如果$A'B'$和$A''B''$都与AB合同，则有$A'B' \equiv A''B''$。

(3) 设AB和BC是在直线a上无公共内点的两个线段，又设$A'B'$和$B'C'$为直线a'上无公共内点的两个线段。如果$AB \equiv A'B'$且$BC \equiv B'C'$，则必有$AC \equiv A'C'$。

(4) 设$\sphericalangle(h, k)$为平面α上的一个角，直线a'在平面α'内且给定a'在α'上的某一侧，又设h'为a'的由点o'引出的射线，则在平面α'内恰有一射线k'，使得$\sphericalangle(h, k)$合同于$\sphericalangle(h', k')$，且$\sphericalangle(h', k')$的所有内点均位于a'的给定一侧。每一角合同于自身。

(5) 如果对两个三角形ABC和$A'B'C'$，有$AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$且$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$，则必有$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$。

第四组　平行公理

设a为一直线且点A不在a上，则在a与A的平面上至多有一直线通过点A而与直线a不相交。

第五组　连续公理

(1) (阿基米德公理)　如果AB和CD为任意两线段，则

在AB直线上存在一组点A_1，A_2，…，A_n，使得AA_1，A_1A_2，…，$A_{n-1}A_n$都合同于CD，并使得B在A和A_n之间。

（2）（线段完备性公理）凡满足第一组(1)、(2)、第二组、第三组和第五组(1)的直线上的一切点构成的点集不可能再扩大。

从上述初始概念和公理出发，按照演绎规则，可以推出欧几里得几何的全部命题。

《几何基础》这本著作一经出版，立即吸引了整个数学界，在出版以后的几个月内成了最畅销的数学书。他的朋友闵可夫斯基认为这是一部具有珍贵价值的经典著作，必将对当前和未来数学家的思想产生巨大的影响。彭加勒评价希尔伯特的这项工作，彻底冲垮了传统几何作茧自缚的屏障，"使数学哲学向前迈进了一大步"。希尔伯特的学生麦克斯·德恩（M. Dehn，1878～1952）指出，在希尔伯特这部著作所产生的影响中，最有决定性意义的是"那种特殊的希尔伯特精神……这就是：把逻辑力量与创造活力结合起来，藐视一切陈规旧俗；……最充分地运用数学思想的自由……"。

事实上，希尔伯特的《几何基础》，作为数学思想史上的一个重要里程碑，它标志着由实质公理法向形式公理法的过渡已经完成。

首先，在希尔伯特公理系统中，初始概念和公理已完全失去了它们的现实属性。"点"、"线"、"面"只起着形式符号的作用，它们可以表现任何对象和关系，只要这些对象和关系满足公理的要求。而公理实际上也只是一些假定，它们不必具有任何特定的直观背景。因此，希尔伯特的公理系统是一种形式上的数学系统，可称作是形式公理系统。与形式公理系统相应的公理法，就是形式公理法。实质公理法的模式是"对象

——公理——演绎”，而形式公理法的模式则是“假设——演绎”。后者研究问题的特征是：从抽象的初始概念和初始假定出发去进行演绎。显然，这比欧几里得实质公理法模式具有更高的抽象性。

其次，希尔伯特深刻揭示了公理系统的结构，在历史上首次明确提出了公理系统应满足的三条逻辑要求：

(1) 完备性，也称完全性。它要求所研究理论的全部定理都可以由这些公理推演出。

(2) 独立性，也称无关性。它要求各条公理在逻辑上互不依存，任何一条公理都不能从别的公理推得。

(3) 相容性，也称协调性或无矛盾性。它要求从这些公理出发不可能推出任何矛盾的命题。

建立公理系统的最重要之点在于保证系统的相容性。为了证明欧几里得几何公理系统的相容性，希尔伯特借助了算术模型，即在实数的算术理论中为欧几里得几何构造一个模型，这实际上是运用解析几何的思想方法。对此，希尔伯特在平面几何里把点和一对有序实数 (x,y) 等同起来，把一条直线与一组联比 $(U:V:W)$ 等同起来，其中U和V不都等于零。如果有方程$Ux+Vy+W=0$成立，则把点 (x,y) 看作是在直线 $(U:V:W)$ 上。通过解析几何中平移和旋转的表达式，合同公理可被代数地解释。于是，运用解析几何的思想方法，希尔伯特把各公理组都代数地解释了。因为定理是公理的逻辑的结果，所以定理也必然适合于这些解释。这就表明，假如欧几里得几何中有矛盾，那么这些矛盾必然会在它的代数解释中出现。也就是说，几何学的相容性问题，被化成了算术的相容性问题。这样一来，希尔伯特在建立欧氏几何形式公理系统过程

中，进一步发展了模型化方法，用这种方法可以证明公理系统的相对无矛盾性。

正因为希尔伯特的形式公理法具有更高的抽象性，不再受物理直观的局限，所以经希尔伯特改造过的公理化思想一经确立，就从原来的几何领域广泛渗透到数学的各个分支学科。在19世纪末、20世纪初，各种不同的形式公理数学系统相继建立起来。如集合论、概率论、近世代数、数论、拓扑学、数学分析等，都先后实现了公理化。形式公理化已成为现代数学发展的一个显著特征。

§2 希尔伯特纲领

希尔伯特纲领，也称希尔伯特规划或希尔伯特计划，它是希尔伯特形式公理化思想进一步发展的产物，也是希尔伯特在数学基础论问题研究中提出的一种数学假说。这一数学假说虽然已被确认为是错误的，但它仍不失其重要历史意义，因为在这一数学假说中以及希尔伯特为建立这一数学假说而付出的努力中，包含着许多闪光的科学思想，特别是元数学(证明论)思想对今日的数学乃至整个的科学发展仍然有着深刻的影响。

一 希尔伯特纲领的产生

希尔伯特一生中的最后一件重要工作，是使数学理论完全形式化并证明形式化数学理论的相容性，从而一劳永逸地消除因集合论悖论而造成的数学基础的危机。因此，希尔伯特纲领产生的直接动因，主要是来自解决数学基础问题的需要。

早在两千多年前，数学基础问题便产生了。希腊学者曾就

数的本质、数学与现实的关系等问题进行过热烈的讨论，由此产生出毕达哥拉斯数的神秘主义和柏拉图的数的唯心主义。在后来的数学发展中，人们对数学基础的探讨，以及由此而引起的不同观点的论争，从来没有停止过。到19世纪下半叶，随着非欧几何相容性问题的深入研究，以及实数理论和集合论的创立，数学基础问题日益引起数学家们的关注。

前面已经谈到，为解决非欧几何的相容性问题，贝尔特拉米，彭加勒和克莱因等人给非欧几何在欧氏几何中找到了模型。如果欧氏几何是相容的，那么非欧几何自然也是相容的。但是，怎样从逻辑上证明欧氏几何的相容性呢？对此，希尔伯特在《几何基础》中给出了一个实数算术模型。而实数算术的相容性又可归结为集合论的相容性。于是，集合论便成为几何学乃至整个数学的基础。如果集合论是相容的，那么数学就有了可靠的基础，人们也就再也不必为数学大厦的基础是否牢固而担扰了。

可是，集合论却偏偏出了毛病，其主要表现是一连串集合论悖论的相继出现。最先引起数学界不安的集合论悖论是由意大利的布拉里·福蒂（Burali-Forti，1861～1931）提出的。1897年3月28日，布拉里·福蒂在巴洛摩数学会的报告中提出：所有序数的序列是良序的，它具有的序数应是所有序数的最大者，因此，这个序数大于所有的序数，这就出现了矛盾。

布拉里·福蒂悖论首先暴露了康托尔集合论的矛盾，不久康托尔本人也发现集合论含有矛盾。他在1899年7月28日给代德金的信中指出，不能谈论由一切集合所构成的集合，否则就会陷入矛盾。由于布拉里·福蒂悖论发表在一个不著名的刊物上，康托尔悖论也只是在往来书信中提到的，因而没能引起数

学界更大的影响。可是，罗素悖论的出现却袭动了整个数学界。罗素（B. Russell，1872～1970）是英国现代著名的哲学家、数理逻辑学家，他在1903年的《数学原理》一书的序言中提到了他那著名的悖论，这本书的第一稿是在1900年底完成的。罗素悖论的内容和康托尔悖论的内容大体上相同，可表述如下：

用M表示由一切包含自己为元素的那些类所构成的类，即$M=\{X|X\in x\}$；用N表示由一切不包含自己为元素的那些类所构成的类，即$N=\{x|x\widetilde{\in}x\}$。由于$N$本身也是一个类，由此可以去考虑它是属于$M$还是属于$N$。

如果N属于N，则由N的定义可知N不属于自身，即$N\in N$，这是互相矛盾的。

如果N属于M，则由M的定义可知N属于自身，即$N\overline{\in}N$。依据排中律，M和N是互相排斥的两种类，由此又产生矛盾。

因此，不管N属于N，还是N属于M都会导致矛盾。这就是著名的罗素悖论、后来罗素又用“理发师悖论”通俗而形象地阐述了这个悖论：一个乡村理发师，自夸无人可与相比，他宣称自己不给自己刮脸的人刮脸，但却给所有自己不刮脸的人刮脸。有一天他发生了疑问，他是否应当给自己刮脸？要是他自己给自己刮脸，那么按照他声明的前一半，他就不应该给自己刮脸；但是要是他自己不给自己刮脸，则按他声明的后一半，他又必须给自己刮脸。于是这个理发师陷入了逻辑困境。

罗素的悖论简单明了，而且直接涉及到集合论的最基本概念：元素，属于，集合，因此引起学术界极大的震动。罗素在1902年6月16日给德国数理逻辑学家弗雷格的信中提到了这个悖论，顿时使弗雷格不知所措，因为他一直企图用集合论来作为数学的“永恒的、可靠的基础”。收到罗素的信之后，他在

刚要付印的《算术的基本法则》第二卷末尾补写道："一位科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之际，它的基础垮掉了。当本书等待付印的时候，罗素先生的一封信把我置于这种境地。"代德金也由于罗素悖论的影响对自己建立起来的实数理论产生了怀疑，他原打算把《连续性及无理数》第三版付印，这时也急忙把稿件抽了回来，加以重新审查。

集合论悖论的出现，使整个数学大厦失去了可靠的基础。于是，围绕着数学基础而展开的历史论争，经集合论悖论的激发，在本世纪初达到空前未有的热烈程度。数学的可靠基础究竟是什么？成了极其迫切和普遍关心的问题。逻辑主义派和直觉主义派首先对此作出了强烈反应。

逻辑主义派的主要先驱者是弗雷格。弗雷格于1873年毕业于哥廷根大学，获得哲学博士学位。1879年成为耶拿大学教授，在那里一直工作了40年。1879年，他发表了《概念的计算，按算术例题形成的纯思维公式语言》一书，阐述了他所建立的符号逻辑系统。在此基础上，逐渐形成了用逻辑方法重建数学的思想。在1884年《算术基础——对数概念的逻辑数学研究》一书中，他用逻辑方法叙述了算术的基础，明确提出：可把算术、代数和分析归为逻辑的一部分，数概念则是运用逻辑规律的直接结果，弗雷格的目标是把数学建立在逻辑的基础上，他在这个方向上作出了许多重要结果，但由于罗素悖论的出现而遭到挫折。弗雷格著作的意义在当时并未得到学术界的理解，直到罗素的著作出版，才引起人们的注意。

逻辑主义派的真正代表人物是罗素。罗素生于威尔士的特雷莱克，幼年时父母双亡，是在祖父母家长大的。他于1890年考入剑桥大学，学习数学和哲学。1895年发表了第一篇数学基

础的论文“论几何学基础”，获三一学院研究员资格。1908年被选为英国皇家学会会员。曾先后在剑桥大学、美国哈佛大学、中国北京大学、美国加州大学任教。他曾两度担任亚里士多德学会的会长，1950年获诺贝尔文学奖。在数学方面，罗素主要从事数理逻辑和数学基础问题研究。他发展了弗雷格的思想，企图把整个数学归结为逻辑。他的思想集中体现在1910～1913年间与怀特海（A. N. Whitehead，1861～1943）合著的三卷本《数学原理》中。其基本论点是：数学的基本概念可以从逻辑的概念导出，数学的公理可以从逻辑的公理导出作为逻辑的定理，于是全部数学就可以从逻辑的公理推出。而逻辑的公理又是任意的，没有任何实际的内容，所以，数学的本质在于它是一种没有内容只有形式的逻辑体系。罗素曾公开宣称：“数学是这样一门学科，在其中我们永远不会知道我们所讲的是什么，也不会知道我们所说的是不是真的。”这段话就是他为自己的“数学即逻辑”的观点以及逻辑公理系统真理性问题所作出的回答。

罗素对自己发现的集合论悖论，作了积极和深入的研究。他认为集合论悖论的起因在于使用了假设：一类事物可以包含本类的整体作为成员。正是由于这种“不合法的整体”引起了“恶性循环错误”。所以要避免悖论，只需遵循这样一个原则：凡是涉及一个集体的整体的对象，它本身不能是该集体的成员。依据这个原则，他提出了类型论和分支类型论。类型论的思想比较复杂，其中一种简单的情况是：把论域分成为不同层次的类型。由个体所组成的类为第一级的类，由第一级的类为元素所成的类为第二级的类。一般地，由第n级的类为元素所成的类构成第$n+1$类。根据这种类型论，只能考虑类型n的对

象是否属于类型$n+1$，不准考虑某一层次的类是否属于该层次类本身的问题。这就排除了康托尔悖论和罗素悖论。罗素的类型论虽然可以消除悖论，但是非常烦琐，而且存在很多缺点。

直觉主义派的思想渊源可追溯到古希腊的毕达哥拉斯学派。历史上直觉主义派的第一个典型代表人物是克隆尼克，他主张数学产生于直觉，认为只有能直觉地感受到的东西才有意义，自然数就是这样的东西。他有句名言："上帝创造自然数，其它的都是人造的"。意思是说，只有自然数是真实存在的，是最可接受的，其余都不过是人为作出的一些文字符号，是不可信的。对于数学的可靠性基础，他不同意逻辑主义派把数学归于逻辑的主张，认为不是数学依靠逻辑，而是逻辑依靠数学，逻辑命题不过是一种更为普遍的数学命题。在他看来，数学的可靠性既不是逻辑，也不是经验，而是一种带构造性的直觉，只有那些通过有限步骤清楚地构造出来的东西，才是可靠的。因此，他拼命地反对无理数、超越数和连续函数理论，否认康托尔的无穷集合理论。

在19世纪末，没有多少人支持克隆尼克的观点。可是，在发现了集合论悖论以后，直觉主义开始活跃起来，并且赢得了象彭加勒这样负有盛名的大数学家的支持。彭加勒就是因为集合论产生了悖论而反对无穷集合的概念和理论。和克隆尼克一样，他坚持数学的定义和证明都必须是构造性的。

系统地提出直觉主义观点的是荷兰的布劳威(L. E. J.Brouwer，1881～1966)，历史上通常把他看作是直觉主义的奠基人。布劳威毕业于阿姆斯特丹市立大学，其博士论文题目是"论数学基础"，在该校任教直到1955年退休，被选为荷兰皇家科学院成员。布劳威的数学直觉主义观点在1907年的博士论

文中就表现出来了。在1908年的“论逻辑原则的不可靠性”一文中，他对逻辑学中的排中律提出了怀疑。布劳威为发展直觉主义数学，发表了一系列著作。他认为数学思维是人脑中的自由构造，与经验世界无关，也不受逻辑规律的约束。他反对把逻辑的排中律运用于无穷集合，认为它会导出矛盾。于是他试图建立一个不依靠排中律的集合论，即直觉主义的集合论。在他的集合论中，只允许存在可数集合，对于[0，1]区间所有实数的集合以及其它不可数无穷集合，是被排斥在外的，因为谈论它们毫无意义。按布劳威的观点，现代数学的大部分成果都要被抛弃掉。

集合论悖论引起的思想混乱，尤其是布劳威直觉主义日益增长的影响，引起希尔伯特极大的不安，他开始关心起数学基础问题。早在1900年第一次国际数学家代表大会上，希尔伯特就把算术理论相容性问题列为著名的23个问题中的第二个问题。当时罗素悖论还没提出。针对罗素悖论带来的严重的灾难性后果，以及布劳威直觉主义横加给数学和数学方法的限制，希尔伯特提出了自己的研究计划。他相信存在着消除悖论的方法，并且不必付出按直觉主义观点需要砍掉一部分数学的那种牺牲。在1904年海德尔堡国际数学会议上，他作了题为“论逻辑及算术”的讲演。他的基本思想很明确，要想避免悖论，必须同时进行逻辑定律和数学定律的研究。也就是说，只有研究数学证明的逻辑结构，才能更好地研究自然数以及整个数学理论的相容性，才能真正避免集合论悖论。他向与会的数学家说道：“如果我们深入考察，那就会承认：在我们叙述传统的逻辑定律时，即已用到某些基本的算术概念，例如用到了集合的概念，甚至在某种程度上用到了数的概念。于是我们发现自己陷入了

某种循环，这就说明，如果我们想要避免悖论，那就必须在某种程度上同时进行对逻辑定律和算术定律的研究。”希尔伯特的这次讲演，在数学史上第一次提出了把证明本身作为数学研究对象的思想。

海德尔堡会议之后，希尔伯特由于忙于积分方程和物理学公理化等问题研究，没能把主要精力投放在数学基础研究上。直到10年以后，他才重新回到这一主题上来，并且同布劳威等人的观点展开了长期针锋相对的斗争。

1917年，希尔伯特在苏黎士给瑞士数学会作了题为“公理化方法”的讲演，全面阐述了一些与认识论有关的数学问题，包括数论和集合论的相容性。他再次强调，应把数学证明的概念作为研究的对象，这是他的元数学即证明论思想的初步展开。

20年代前后，布劳威在一系列著作中对古典数学作了详细的审查和彻底的批判，为各数学分支确定哪一种概念和定理是可以接受的，哪一种应当抛弃。他的直觉主义观点在青年数学家中的影响很大，他的追随者日益增多，甚至连希尔伯特的得意门生外尔也成了布劳威数学观念的信奉者。直觉主义给数学带来的危险，使希尔伯特越来越感到不安，他愤怒了，对直觉主义的抨击越加猛烈起来，并且决心把自己的计划进行到底。

1922年，希尔伯特在《数学的新基础：第一篇》一书中，全面地展开了他处理数学基础问题的思想。他的思想出发点是，用符号逻辑方法把命题和证明加以形式化，进而再把形式化的命题和证明作为对象来加以研究。这是一种形式化的数学研究方法。在同年德国自然科学家协会莱比锡会议上，他又作了题为“数学的逻辑基础”的报告，进一步阐述了自己的思想

和方法。通常把他在这次会议上表述的思想称为“希尔伯特纲领”。

在以后的20年间，希尔伯特为实施自己的纲领作了大量的工作，主要的论著有：《论无限》（1925年），《数学基础》（1927年），《数学基础问题》（1928年），《理论逻辑纲要》（与阿克曼合著，1928年），《初等数学基础》（1930年），《逻辑及对自然的认识》（1930年），《排中律的证明》（1931年），《数学基础Ⅰ》（同贝尔纳斯合著，1934年），《数学基础Ⅱ》（同贝尔纳斯合著，1939年）。

二 希尔伯特纲领的内容

希尔伯特纲领的基本内容，简单地说就是：首先将数学理论转换为形式系统，然后用有限的方法证明形式系统的相容性。这里所说的形式系统，是一种高度抽象的符号系统，它与形式公理系统不同。在形式公理系统中，命题还有其逻辑结构，逻辑概念还有意义，命题的推演还是真正逻辑意义上的演绎推理，从希尔伯特的《几何基础》中可以明显地看到这些特征。可是，在形式化系统中，数学概念成了毫无具体内容和意义的各种符号，数学命题成了一个个由抽象符号组成的公式，数学推导也成了抽象公式的某种变形。可见，这是一种实现了彻底的抽象化和符号化的系统，是一种在更高抽象层次上出现的形式化的公理系统。用希尔伯特自己的话说就是：“这样，取代了那种用自然语言来表达的、具有内容的数学知识，我们最后得到的是由数学符号和逻辑符号所组成的一组公式。这些公式是按照一定的规则依次得出的：其中的一些相当于数与公理，而那种以一些公式推出另一些公式时所用的规则相当于内容上的

推理，从而内容上的推理就为那种由规则所决定的形式过程所代替”。

按照希尔伯特纲领，一个形式系统应当包括以下几个部分。

(1) 初始符号，包括数学和逻辑符号。

(2) 形成规则，用来规定哪些符号序列是合式公式。合式公式是指解释后有意义的符号序列，简称为公式。形成规则也就是构造公式的规则。

(3) 公理，作为推导其它公式出发点的公式。

(4) 变形规则，规定如何从公理和已经推导出的公式经过符号变换而推导出另一公式。解释后的变形规则，实际上就是推理规则。应用变形规则而推得的公式，经过解释也就是系统的定理。

为了保证上述几部分的实行，希尔伯特还建立了一种相应的方法——能行性方法。这个方法的职能是：

(1) 判定一个符号是否为一个初始符号。

(2) 判定一个符号序列是否为公式。

(3) 判定一个有穷长的公式序列是否为一个证明。

能行性方法的实质是要求有限主义即经过有限步骤不推出矛盾来，证明就为可靠，这就避免了无穷的推断。

如果说在形式公理系统研究中，希尔伯特用解析法解决了非欧几何系统以及欧氏几何系统的相对相容性问题，那么，希尔伯特纲领的目的，则是用形式化方法，即撇开数学具体内容和意义的方法，去证明从数学理论中抽象出来的形式数学系统的绝对相容性，由此彻底地解决数学理论的可靠性问题。由于算术理论的相容性是整个数学理论相容性的基础，因此，希尔伯特就把用有限的方法证明形式算术系统的相容性作为实现这

一纲领的关键一步。当然，在具体实施这一纲领过程中，希尔伯特的工作远远超出了关于数学理论相容性证明的研究，而是涉及到了形式数学系统的各个方面，其中包括形式数学系统的表述方式、完备性和独立性证明等。

希尔伯特对实现自己的纲领是充满信心的，并深信由此最终能够一劳永逸地解决数学基础的可靠性问题。他指出："人们必须承认，在这些悖论面前，我们所处的这种状况是不能长期忍受下去的。试想，在数学这个号称可靠性和真理性的典范里，每个人所学的、教的和应用的那些最普遍的概念结构和推理方法竟会导致谬误。如果连数学也失灵的话，那么我们应该到哪里去寻找可靠性和真理呢？可是，有一种完全令人满意的方法可以避免这些悖论。"他所说的这种令人满意的方法，就是通过证明论来证明形式数学系统的相容性。在1927年对汉堡的一次访问中，希尔伯特声称，他的目标仍然是"一劳永逸"地消除任何对数学基础可靠性的怀疑，"通过证明论，完全可以达到这一目标，虽然要使这一理论得到充分的发展还需要做大量的工作。"在讲演中，希尔伯特分析了他的纲领所受到的种种批评，特别是来自布劳威直觉主义派的反对。他承认，形式算术系统的相容性还没有被证明，但他乐观地断言，要得到这一证明已经为时不远了。

1930年，也就是希尔伯特退休的这一年，哥尼斯堡市授予他荣誉市民称号。在故乡的授予大会上，他作了"逻辑及对自然的认识"的著名讲演。他向听众阐述了数学在全部现代文明中的重要作用，以及他近年来从事数学基础研究所形成的各种看法。他的讲演是激动人心和富有感染力的。在讲演的结束部分，他针对杜布瓦-雷蒙（P. D. E. Du BOiS-Reymond, 1831

～1889)及其追随者信奉的“我们无知，我们将永远无知”这句沮丧的时髦话，坚定有力地说出了这样一句话：“Wir müssen wissen, Wir werden wissen”（我们必须知道，我们必将知道）。这句话深刻体现了希尔伯特追求真理的科学精神，它使人感觉到，希尔伯特将为解决数学基础问题作出最后的努力。

三　希尔伯特纲领的失败及其历史意义

几乎就在希尔伯特发表哥尼斯堡演说的同时，一位年仅25岁不出名的小人物—维也纳哲学系毕业生哥德尔（K. Güdel, 1906～1978）向这位数学巨人提出了挑战。

哥德尔于1906年4月28日生在奥匈帝国属下的布瑞尼。他的双亲是德国人。1924年中学毕业后，他进入维也纳大学哲学系，先是攻读物理学，后转而攻读数学。他平时喜欢读一些哲学著作，对精密科学严密性的偏爱和对哲学的兴趣，是他后来取得成功的重要因素。他起初在维也纳大学任教，第二次世界大战爆发后移居美国，一直在普林斯顿高等研究所工作。由于研究所里有人反对和阻挠，直到1953年47岁时才成为教授。1978年1月14日下午，他死在普林斯顿医院的候诊室，享年72岁。

哥德尔是在1928年读书期间开始研究数学基础论问题的。这一年，正值希尔伯特和阿克曼合著的《理论逻辑纲要》一书出版，哥德尔认真研读了它。书中给读者明确提出一个尚未解决的重要问题——狭义谓词演算的完备性问题。对此，希尔伯特和阿克曼写道：“这个公理系统是否完备？这里完备的意思至少要求：在每个个体域中都为真的所有逻辑公式都能从这个公理

系统推导出来。这个完备性问题仍然悬而未决。”哥德尔深入探讨了这个问题，很快就作出了正确而完美的解答。他把结果写成博士论文，1929年秋通过答辨，1930年2月获得博士学位。他的论文修改稿以题“关于逻辑函数演算的完备性”发表在1930年的《数学及物理月刊》上。

1930年夏天，哥德尔开始研究希尔伯特纲领，他想按照希尔伯特开辟的道路去证明数学分析的相容性。他把问题加以分割，打算用有限方法去证明数论的相容性，然后再用数论的相容性去证明数学分析的相容性。可是研究的结果，他不仅没有达到目的，反而得到了悖论。于是他放弃了原来的想法，去研究问题的反面。

同年8月，哥德尔参加了在哥尼斯堡召开的科学会议，并且听了希尔伯特的“逻辑及对自然的认识”的著名演说。就在这次会议上，他宣布了著名的后来以他的名字命名的不完全性定理：在包含初等数论的一致的形式系统中，存在着不可判定的命题。也就是说，在包含初等数论的无矛盾的形式系统中，总是存在着命题A，使得我们不能在这个系统中证明A或它的否定$\neg A$为真。这就揭示了一个人们没有想到的科学事实：任何充分丰富的一致的形式系统都是不完全的。通常称这条定理为哥德尔第一定理。不久，哥德尔又宣布了该定理的一个推论：一个包含数论的形式系统的一致性，在该系统内是不可证明的。通常称它为哥德尔第二定理。

哥德尔的研究成果在哥尼斯堡会议上一公布，就受到与会者的高度重视。冯·诺依曼(J. Von Neumann, 1903～1957)、卡尔纳普(R. carnap, 1891～1970)和海丁(A. Heytinq,1899～1980)等著名数学家参加了会议。冯·诺依曼赞赏地说：

“哥德尔在数理逻辑方面的成就是优异的，不朽的，确实它不只是一座纪念碑，而是一座其意义由于受到时间、空间限制还远未显现的里程碑。” 1930年10月23日，韩恩教授把哥德尔的论文摘要提交给维也纳科学院。1931年初，《数学与物理月刊》发表了哥德尔的论文“论数学原理和有关系统 I 的形式不可判定命题”。这篇论文成为他在维也纳大学就职助教的论文。

哥德尔不完全性定理表明，包含自然数算术的形式系统是不完全的。也就是说，形式算术系统不可能表述出关于自然数的全部真命题，有些命题不能在系统中得到证明。这就宣告了希尔伯特纲领的失败。

尽管希尔伯特的研究纲领遭到了失败，他所长期致力的形式数学系统相容性证明问题没能得到真正解决，但是这一纲领仍然不失为人类创造性思维的一个重大成果。哥德尔认为，“虽则有了我的否定结果”，希尔伯特纲领“仍不失其重要性，并继续引起人们的高度兴趣”。

希尔伯特纲领的意义是多方面的，它的失败给人们带来的启示是深刻的。

第一，希尔伯特纲领对于挽救被直觉主义派所砍杀的古典数学起了不可估量的作用。

我们知道，导致希尔伯特纲领提出的直接原因，是集合论悖论的出现以及布劳威直觉主义乘机对古典数学的扼杀。按布劳威等人的有限构造主义思想，要想排除集合论悖论，必须把古典数学的许多成就，包括存在性证明、分析学的大部分和康托尔的无限集合理论，统统弃之于数学门外。正是为了挽救和捍卫人类已有的数学成就，消除布劳威的错误数学观念在数学

界日益增长的影响，希尔伯特提出了他的研究纲领，并用以尖锐地批判和阻止了希劳威等人借集合论悖论对古典数学大砍大杀的暴虐行为。

事实上，希尔伯特纲领一提出，就在数学界产生极大的反响。希尔伯特的学生外尔曾一度是布劳威数学观点的积极支持者，希尔伯特的研究纲领，使他对布劳威直觉主义的热情骤然减退。受这一纲领的影响，外尔很快就对布劳威的错误观点有所认识。在1927年汉堡的一次会议上，他指出："希尔伯特迈出的这一步，无疑是为形势所迫。我现在已认识到它的重大意义。凡是目睹这一发展的人，对于希尔伯特通过证明论来完成他的公理化大业时所表现出来的智慧和毅力，无不感到钦佩。我乐意声明，在对这一新趋势的认识论方面的评价，我同希尔伯特之间并不存在隔阂。"他认为，正是希尔伯特的形式系统研究"给数学基础和数学真理问题带来了全新的转机"。外尔的转变代表了当时许多数学家对数学基础问题的态度。

第二，希尔伯特纲领的提出，标志着数学的形式化发展到新的阶段。

我们知道，数学的形式化是数学的抽象化在更高程度上的表现，数学越发展，抽象化的趋势就越强，形式化的程度也就越高。我们从数学的三个基本门类——几何学、代数学、数学分析的发展可以清楚地看到这一点。几何学从欧几里德几何学发展到希尔伯特的形式几何学，代数学从解方程发展到抽象代数理论，数学分析从感性直观的无限小发展到形式的无限小，都深刻地体现了数学的形式化发展的趋向。

在20世纪初，形式化思想已广泛渗透到算术、代数、几何学和分析学等各个数学领域，并有着日渐增强的趋势。然而，

在希尔伯特纲领提出之前，数学理论的形式化并不是彻底的，包括希尔伯特本人建立的形式公理系统，也只能说是一种半形式化系统。这是因为，形式数学系统完全是由符号化和公式化的语言表述的，不使用任何自然语言，也不含有任何真实的数学和逻辑内容，而半形式化系统则仍然使用着某些自然语言，在某种程度上还保留着有内容的数学知识，逻辑推理规则还起着一定的作用。希尔伯特为了实施其证明数学理论可靠性的纲领，把有内容的数学理论抽象为完全形式化了的系统。这种完全形式化的数学系统，可以使数学的理论体系严格化、简明化和规范化，因而便于从整体上研究数学理论体系的结构性质和功能。可见，这种形式系统虽然不直接反映客观世界的空间形式和数量关系，但对数学基础论研究是有重要方法论意义的。

第三，希尔伯特纲领的实施，开拓了元数学即证明论这一新的数学领域。

希尔伯特在提出和实施这个纲领的过程中，首次明确区分了三种数学理论：一是非形式化的数学理论；二是将第一种数学理论形式化而构成的形式系统；三是以第二种数学理论为研究对象的理论，即“元数学”或“证明论”。

元数学是一种高层次的数学理论，它不研究具体的数学命题及其证明，而是从整体上研究形式数学系统的结构、性质和功能。这种把理论本身作为对象，对理论整体结构、性质和功能进行的研究，无疑是数学方法论的一次重大突破。如果说，过去人们的眼光只停留在数学理论之内对数学的概念、命题和证明进行有内容的微观式研究，那么，元数学的产生则使人们站在数学理论之外，对理论本身进行抽象的整体性研究，包括理论自身的描述、定义、性质、结构和功能等。从某种意义上

讲，希尔伯特的纲领就是为建立元数学而提出来的。这一纲领虽然因其有局限性而遭到了失败，但在实施这一纲领过程中所引伸出的元数学思想，却得到了确立和发展。而且，元数学的许多重要成果，都是在实施希尔伯特纲领的过程中得到的。哥德尔不完全性定理的提出，就是其中典型的一例。正是这一著名的定理，使元数学成为现代数理逻辑的四大部门之一。现代数理逻辑的四大部门是：证明论（元数学），递归论，模型论，公理集合论。

在希尔伯特之前，虽然也曾有人对数学理论的性质和结构进行过整体性研究，但第一个自觉地提出元数学思想，并对其加以全面而深入研究的人，却是希尔伯特。现代数理逻辑学家塔尔斯基在评价希尔伯特的工作时指出："希尔伯特仍不愧为元数学之父。因为，正是他，把元数学创建成一门独立存在的学科，并以他那伟大数学家的全部权威来支持它，为它的生存而斗争。也正是他，为元数学筹划了未来的进程，把抱负和重任寄托于它。的确，婴儿没有实现父亲所有的瞩望，它没能长成一名神童。但是，经过心智和体格的健全发育，它已成为伟大数学家族中的一名正式成员。" P·贝尔纳斯（P. Bernays, 1888～1977）在美国《哲学百科全书》中指出："希尔伯特通过形式化使数学证明成为数学研究的一个对象的思想，已经证明是极其富有成果的。尽管希尔伯特在算术基础方面的工作没有达到他寻求的效果，即'一劳永逸地消除数学中的基础问题'（'die Grundlagenfragen in der Mathematik alssolche endgültig aus der Welt zu schaffen'），他确实建立起作为一个有价值的数学研究领域的证明论，所以，希尔伯特是这个较新的数学基础理论的开拓者，正如他是许多其它的数学领域

的开拓者一样。”

希尔伯特的元数学思想，其意义已经远远超出了数学的范围，广泛渗透到科学的各个领域。元数学的产生意味着，可把科学的体系划分为两个不同的理论层次：对象理论和元理论。元理论是研究对象理论的理论，它比对象理论具有更高的层次，它主要是从整体上研究科学理论的性质、结构、功能和发展规律。这种元理论的思想方法，不仅适合于数学和理论自然科学研究，而且对于技术科学和社会科学研究也有着普遍的方法论意义。元数学的对象理论是完全形式化了的数学系统，是从“纯粹”状态下研究数学理论的性质、结构和功能。而一般意义上的元理论研究，并不要求对象理论是完全形式化了的抽象系统，即对象理论可以是“有内容”的理论。从这种意义上看，元逻辑、元物理学、元化学（化学学）、科学体系结构学及哲学学等，都是具有元理论性质的学科。现代科学的特点是各种理论的综合运用，元理论研究就是这种综合研究的一个极其重要的形式。在当今时代，对科学知识系统的元理论研究，一般说来是同对象理论的自身发展紧密地结合在一起的，科学理论越是向前发展，越需要对其进行元理论的自我分析，而这种自我分析又只有在一门科学理论发展到成熟之后才能得以完成。因此，元理论研究是一个很富有生命力的科学领域。

第四，希尔伯特纲领的失败，从反面为形式化研究提供了重要启示和借鉴。

希尔伯特纲领是一种不能实现的纲领，它的失败深刻暴露了形式系统内在的不可克服的局限性，它表明形式化方法在数学中决不是万能的，形式系统不能揭示全部数学真理，因为在任何足够丰富和一致的形式系统中都存在着该系统所不能判定

的命题。这就启发人们，在抽象的理论研究中应避免花费大量的精力去证明那些不能判定的命题，而应把精力集中用于解决具有能行性的问题。在某种意义上说，计算机是一种物化了的形式系统，对于计算机来说，就是不要让它们去解决那些不可判定的问题，而要让它们去解决能行可计算或能行可判定的问题。如果用计算机来解一个不可判定的命题，那么计算机不是不回答，就是回答错了。英国著名数理逻辑学家图灵（A. Turing, 1912～1954）提出的“停机问题”，就是典型的不可解问题。

由于希尔伯特纲领同科学方法论问题密切相关，元数学研究比一般数学研究更容易受到哲学的影响和作用，因此，在分析希尔伯特纲领的意义时，不能不涉及到希尔伯特的数学观问题。

无疑，希尔伯特纲领作为希尔伯特数学基础论思想的具体表现，有片面强调形式化的倾向，在某种程度上过份夸大了形式化方法在数学基础论问题研究中的作用，但他决不是一个极端的彻底的形式主义者，更不能把他的这一纲领看作是形而上学和唯心主义数学观的产物。形式主义数学观是对数学的一种哲学看法，其基本点是把全部数学理论都看成是且仅仅是一些形式系统，也就是说，数学的对象只是一些毫无意义和具体内容的形式符号，数学的各种命题不过是一种符号游戏，数学的真理性则在于形式系统自身的逻辑相容性。这种数学观显然带有浓厚的唯心主义色彩。

从希尔伯特纲领及希尔伯特的整个科学生涯可以看出，他倡导形式公理化方法，提出形式数学系统，但他从来没有把全部数学仅仅看成是由形式系统构成的。他区分了三种不同层次的数学理论：直观的非形式化的数学理论，形式数学系统和元数学。其中形式数学系统不过是对第一种数学理论的进一步抽象，

它们并不是主观臆造的，而是有其由之而来的直观原型。正如希尔伯特本人指出："在我们的形式主义游戏中所出现的公理和可证明的定理，乃是形成通常数学对象的那些概念的映像。"

另外，希尔伯特把数学理论加以形式化，其目的并不是在形式系统中去研究原来的数学理论所要研究的对象，而是把形式系统本身作为研究的对象，这已不是原来意义上的数学研究了。例如，把自然数理论形式化，构造出它的形式系统，并不是在这个系统中研究自然数的性质和运算，而是为了数学研究这个形式系统本身的结构。显然，这是两种不同意义的数学研究。可见，由希尔伯特纲领具有形式化研究的特征，不能简单地由此推断希尔伯特本人否定数学概念的意义和真实性。

事实上，希尔伯特一生中大量的工作都用在直观的非形式数学理论的研究上，他的不变量理论、数论、分析学、积分方程等研究，无一不体现了他对数学理论现实意义的重视。在1900年巴黎国际数学家代表会上的"数学问题"报告中，希尔伯特深刻阐发了数学的现实意义和实践基础，他指出："在每个数学分支中，那些最初、最老的问题肯定是起源于经验，是由外部的现象世界所提出。"希尔伯特十分重视思维在数学创造中的能动作用，但他并没有把这种能动作用加以绝对化而走向极端，没有导致对数学现实意义的否定。他认为，在数学的发展中，纯粹思维的能动作用与不断汲取现实世界的真实关系反复相互作用着。用他的话说就是："当纯思维的创造力进行工作时，外部世界又重新开始作用，通过实际现象向我们提出新的问题，开辟新的数学分支。而当我们试图征服这些新的属于纯思维王国的知识领域时，常常会发现过去未曾解决的问题的答案，这同时就极有成效地推进着老的理论。"可见，希尔伯特

并没有把数学的抽象性和形式化特点加以绝对化。象希尔伯特这样一位长期从事具体数学问题研究而又富有成果的数学家，是决不会否定自己终生所从事的事业的现实意义的，更不会把自己的数学创造活动看成是在玩弄一种无意义、无内容的符号游戏。就是基于这种评价，现代著名数学家哈代指出："正是这个人，在构造有意义的数学方面也许比任何同时代数学家都贡献了更丰富、更漂亮的定理。"

现代数学基础论研究中的形式主义者从希尔伯特的形式化思想出发，却沿着偏离希尔伯特的思想走向极端。他们时常把希尔伯特奉为先师，但其数学观与希尔伯特是完全不同的。他们根本否定数学的客观内容和客观真理性，把直观的非形式数学理论和抽象的形式数学系统割裂开来，甚至用抽象的形式数学系统取代全部数学理论。形式主义者追求数学抽象方向的这种片面性，其危险就在于使人们不能全面领悟和继承希尔伯特的科学思想，使希尔伯特的数学观只有形式化主张这一方面被继承下来，使数学只向抽象的形式化的一极发展。消除这种危险最有效的办法，是把直观和逻辑的力量结合起来，把纯粹数学和应用数学统一起来。现代著名数学家冯·诺伊曼曾深刻分析过因过分追求抽象而导致数学退化的严重危险，他说："在距离经验本源很远很远的地方，或者在多次'抽象的'近亲繁殖之后，一门数学学科就有退化的危险，……每当到了这种地步时，在我看来，唯一的药方就是为重返青春而返本求源：重新注入多少直接来自经验的思想。我相信，这是使题材保持青春与活力的必要条件，即使在将来，这也是同样正确的。"冯·诺依曼的担心及其告诫，对于今天的数学家全面领悟希尔伯特的科学精神，无疑是有重要启示意义的。

第四章　具有特色的研究方式

希尔伯特的一生是创造性科学研究的一生，他的工作涉及到广阔的数学领域，纵横现代数学的版图，几乎到处可以看到以他的名字命名的概念、术语、定理和公式：希尔伯特曲线，希尔伯特方体，希尔伯特空间，实希尔伯特空间，复希尔伯特空间，准希尔伯特空间，可列希尔伯特空间，希尔伯特不等式，希尔伯特变换，希尔伯特多项式，希尔伯特子群，希尔伯特模群，希尔伯特模形式，希尔伯特模函数，希尔伯特概型，希尔伯特不变积分，希尔伯特特征函数，希尔伯特范数剩余符号，希尔伯特合系定理，希尔伯特基定理，希尔伯特零点定理，希尔伯特不可约性定理，希尔伯特公理，希尔伯特纲领，等等。希尔伯特的成功来自各种因素，其中一个极为重要的因素，就是他有着独到而有效的研究方式和方法。这里，仅就他具有特色的几种研究方式和方法作以剖析。

§1　直攻重大而关键的问题

当代著名科学哲学家波普尔(K. Popper,1902～)在探究科学发现的规律时，把科学发现的起点归结为科学问题，因为“正是问题激发我们去学习，去发展知识，去实践，去观察。”科学问题作为科学中的疑难和矛盾，是导致科学知识增长的生长点，它们的不断产生和相继解决推动着科学向前发展，这已是

被科学的历史证明了的一条真理。希尔伯特从事科学创造的一个重要方法论特色，就是十分重视研究和解决那些重大而关键的问题，他深深懂得问题在科学发展以及个人创造活动中的重大价值，把问题看作为指引研究者前进的明灯。他不仅把解决具体的重大问题作为自己走向成功的阶梯，而且对研究和解决问题的方法论进行了系统而深刻的论述。这些论述对于今日的科学研究工作者，仍然是很有教益的。

一　不停顿地向具体的重大问题进击

希尔伯特的科学生涯，按其发表的成果，可明显地划分为六个不同的时期：(1) 不变量理论（1885～1893年）；(2) 代数数论(1893～1898年)；(3) 几何基础（1898～1902年）；(4) 分析学（1902～1912年）；(5) 理论物理（1912～1922年）；(6) 数学基础论（1922～1939年）。当然，每个时期实际所作的工作要比那个时期的主题稍宽一些，而且不同时期的工作有一定的交叉。希尔伯特之所以在一生中能辗转六个不同的研究领域，并且在每个领域中都很快作出重大的发现，是与他善于选择和直攻重大而关键的问题这一研究方法分不开的。希尔伯特“最老的学生”布鲁门萨尔(O. Blumenthal，1876～1944)几乎在整整25年的时间里对他的老师进行了深入细微的观察。他在概括希尔伯特的工作特色时指出，希尔伯特数学研究方法最突出的一个特点，就是不停顿地向具体的重大问题进击。希尔伯特的得意门生，他的“数学儿子”、著名数学家赫尔曼·外尔在回忆他“学父”的工作时也指出：“希尔伯特方法的特点是具体地直攻问题”。希尔伯特的工作表明，他的科学活动的历史也就是一部选择和解决重大数学问题的历史。

事实上，希尔伯特就是从直攻果尔丹问题闯入代数不变量领域的。为解决这一著名的历史难题，他付出了三年艰苦的努力。果尔丹问题如此地重大和关键，以至于人们认为，它的解决几乎结束了不变量理论的一个时代。希尔伯特本人也是这样认为的。他在解决果尔丹问题之后，曾概要总结了不变量理论的历史以及他在其中所作的工作的意义。他指出："一门数学理论发展的历史，很容易分为三个阶段：朴素的、形式的和批判的时期。就代数不变量理论而言，它的创立者凯莱和西尔维斯特是朴素时期的代表：在引出最简单的不变量概念并漂亮地应用于解决低次方程的过程中，他们体验了发现新事物的喜悦。发明符号演算并加以完善化的是克莱布奇(R. A. Clebsch, 1833～1872）和果尔丹，他们是第二个时期的优胜者。我上面列出的定理则反映了批判时期的表达方式……"。他所指出的那些定理就是希尔伯特围绕果尔丹问题给出的。希尔伯特从果尔丹问题出发，几乎结束了从凯莱开始并长期以来一直被数学家们讨论着的不变量理论，他的工作使他在这一领域赢得了极高的声誉。有人曾评价，希尔伯特的这项工作几乎使整个不变量理论的呼吸停止了。

果尔丹问题的解决及其对不变量理论的重大影响，使希尔伯特找到并检验了他成功的有效途径——钻研单个的重大问题，从具体的问题出发推进理论的发展。

希尔伯特在向问题的进击中有一个习惯，他总是乐于在一个时期内集中精力解决一组某一学科发展方向的重大问题，而一旦自己的目标达到，便立即离开这个领域，转身进入更需要他的另外的领域。从1885年希尔伯特发表第一篇不变量理论问题的论文，到1893年他发表最后一篇这方面的论文，他在不变量

领域工作了8年之久。在希尔伯特看来，果尔丹问题及其相关问题的解决，使不变量理论大体建立起来，他在这一领域中的最重要目标基本达到。于是，在完成了最后一篇关于不变量的文章后，他便把精力转向了另一个领域——代数数论中的问题。他在给好友闵可夫斯基的一封信中果断地宣布："我将永远地离开不变量理论"，"从现在起，我要献身于数论"。

从1894年开始，希尔伯特闯入了代数数论领域。象研究不变量理论一样，他首先找到了自己进击的问题——二次互反律的推广。为解决这一问题，他创造了范数剩余概念和范数剩余记号。在此工作基础上，他进而又解决了更为一般性的问题——把一般的互反律推广到代数数域。其后，他在代数数域理论中大显身手，取得了一系列重大进展，完成了不朽的数论报告"代数数域论"。1898年，他发表了重要论文"论相对阿贝尔域理论"。这是一篇纲领性文章，在这篇文章中，希尔伯特概括地提出了一种新的理论——类域论。这一次不同于不变量理论的研究，如果说在不变量领域他结束了这个理论的一个时代，那么这一次他却通过直攻具体的重大问题开创了数论理论的新时代。他没有深入到类域论这个新领域中，而是把这块蕴藏着丰富矿石的矿土留给后来的数学家去开采。他又向另外的领域急转弯了。

就在"论相对阿贝尔域理论"论文发表的当年，希尔伯特转向了几何基础中一个长期未能解决的历史问题：建立在物理直观基础上的欧几里得几何公理系统缺乏严密性。这一问题在欧几里得时代就产生了，非欧几何的发现激发了人们研究这一问题的热情，帕什、皮亚诺等人试图解决这一问题都没有获得成功。希尔伯特深深理解这一问题的重要性，它不仅关系到

几何学理论体系的建构问题，而且涉及到公理方法这一数学最重要工具是否完备。他在《几何基础》这部著作中成功地解决了这一问题。他把几何学建立在牢靠的基础上，探讨了公理系统的逻辑结构以及公理方法的原则，从而结束了自欧几里得时代以来几何基础的建设问题。希尔伯特在几何学领域中的巨大成功，使原先只听他谈论代数数域的学生感到十分惊奇，他们很不理解希尔伯特是怎样能够从数论领域迅速闯入几何学领域，并很快就在其中作出伟大而成熟的工作的。但几乎就在他们思索这个问题时，希尔伯特又开始在另一个完全不同的数学领域里工作了。

《几何基础》刚刚出版不久，希尔伯特就转向了分析学中一个著名的老问题——狄里克莱原理问题。他以简单明了的思路迅速解决了这一历史难题，使狄里克莱原理重新恢复了它在数学中的重要地位。希尔伯特对这一问题的研究引起了变分学一系列创造性的变革。狄里克莱原理问题标志希尔伯特转向分析学领域的第一个主题——变分学；弗雷德霍姆积分方程问题，则把他引向第二个主题——积分方程论。他认为分析学的这二个主题是交织在一起的。研究积分方程对于定积分理论、级数展开理论、微分方程理论、位势理论、变分学以及理论物理学，都是重要的。弗雷德霍姆(K. Fredholm，1866～1927)曾经使用积分方程和线性代数方程之间的类似性来研究积分方程，但他没有对无穷多个代数方程实现极限过程。希尔伯特认识到弗雷德霍姆积分方程的推广可以解决分析学和理论物理学一系列过去不能解决的问题。于是，他的第一步工作就是在有限的线性方程组上实现极限过程，然后把这些结果推广到积分方程，以使弗雷德霍姆积分方程具有更大的普适性。从1904年到1912

年，他围绕这一主题发表了一系列研究成果，其中最有影响的成果是把谱分解的理论由全连续二次型推广到有界二次型。希尔伯特的谱理论后来成为量子力学的有力数学工具。

积分方程和物理学有着天然的内在联系，最初的积分方程大多来自于物理问题，积分方程则为物理学研究提供了有力的工具。积分方程和物理学的天然亲缘关系以及希尔伯特本人对物理学的浓厚兴趣，使得他在1912年完成《线性积分方程一般理论的原理》一书后，就把注意力转向了物理学领域。他的目标是把公理法用于物理学研究，用数学来改造物理学的直观和经验研究方式。从1912年到1922年间，他不仅潜心地研究着物理学问题，而且经常作关于物理方面的演讲并指导研讨班，其中最重要的贡献是把积分方程理论应用于气体分子运动论和初等辐射理论。

希尔伯特一生中最后涉猎的数学领域是数学基础论。把他引向这一领域的主要问题，是集合论悖论所导致的数学危机，具体地说就是数学基础的可靠性问题。为了解决这一问题，他提出了有名的“希尔伯特纲领”。尽管这一次他没有象在以往几个数学领域中那样取得预期的成功，但在实施这一纲领过程中，他发展了数学的形式化研究方法，开拓出了元数学这一新的研究领域。这些成就本身就是对数学基础论研究的重大贡献，它们的意义并不小于他在其他领域中的工作。

就这样，从1885年希尔伯特撰写关于不变量理论博士论文，到1939年出版他和贝尔纳斯合著的《数学基础 Ⅱ》，50多年来，他通过直攻重大的具体问题，从数学的一个领域转到另一个领域，而且在每个领域中都获得了显著的成果。其转移的格局可用下图表示：

1885年—1893年	1893年—1898年	1898年—1902年	1902年—1912年	1912年—1922年	1922年—1939年
果尔丹问题	互反律推广问题	几何公理体系严密化问题	狄里克莱原理问题	物理学公理化问题	数学系统可靠性问题
不变量理论	代数数论	几何基础	分析学	理论物理	数学基础论

数学家们大多是乐于跟着他们的领头人跑的，每当希尔伯特转向一个新的研究领域，都要引起这个领域在相当长一段时间内的研究热潮，尤其是那些年轻的数学家，他们更是乐于思考希尔伯特所思考的那些问题。例如，希尔伯特对弗雷德霍姆积分方程的兴趣以及对整个积分方程理论的看重，使这门学科进入全盛期，在20世纪初研究积分方程成了一种世界性的狂热，产生了大量的文献。

二　富有吸引力的“巴黎讲演”

希尔伯特通过采取直攻重大而关键的具体问题，在数学的几个领域取得了一系列的重大突破。他对自己的这种研究方式十分看重，在1900年国际数学家代表大会上，他专门作了题为“数学问题”的报告，这就是数学史上著名的“巴黎讲演”。在这篇具有历史意义的讲演中，他深刻阐述了重大而关键的问题在数学发展和数学家个人创造活动中的重要作用，数学问题的来源及解决数学问题的方法论原则。同时，他还从数学的各个领域挑选出23个重要问题，号召数学家们去研究和解决。

1899年末，希尔伯特收到了第二届国际数学家会议筹备组的一份邀请，请他在1900年 8 月的巴黎会议上作一个主要发言。希尔伯特接受了这个邀请，打算发表一个与世纪之交相称的演说。起初，他考虑着两个不同的题材，一是作一个为纯粹数学辨护的讲演，以与彭加勒在第一次代表大会上关于应用数学的发言相对应；二是通过阐述数学发展中的个别而重大的问题，讨论一下新世纪数学发展的方向。

究竟选取哪个题材为好？希尔伯特一时还拿不定主意。于是，他写信给在苏黎世任教的好友闵可夫斯基，想听听他的意

见。闵可夫斯基在回信中表示赞同第二个题材，他写道："最有吸引力的题材，莫过于展望数学的未来，列出在新的世纪里数学家们应努力解决的问题。这样一个题材，将会使你的讲演在今后几十年的时间里成为人们议论的话题。"同时，他还忠告希尔伯特，对数学的未来作预言毕竟不是一件容易的事情。

经过反复思考，希尔伯特决定采纳朋友的意见，选择第二个题材，不过他没有马上给朋友写信告诉自己的最后决定。一直到6月份，他的讲稿还没有露面，会议日程表已经发出，这使闵可夫斯基很着急。直到7月中旬，离会期还有20多天的时候，希尔伯特才把讲稿的校样寄给闵可夫斯基和赫尔维茨，讲演的题目定为"数学问题"。闵可夫斯基和赫尔维茨以极大的兴趣阅读了校样，他们对讲稿的内容和演说的方式提出了一些建议。如果从1899年底开始考虑选题算起，希尔伯特为准备这个讲演整整花了8个月的时间。

8月8日上午，在巴黎召开的第二届国际数学家代表大会上，年方38岁的希尔伯特作了题为"数学问题"的讲稿。这个讲演吸引了整个数学界的注意力，成为本世纪数学史上一个富有历史意义的重大事件。

希尔伯特的"巴黎演讲"大体上分为三个部分。第一部分是总论，在这部分中，希尔伯特强调了决定着一门科学发展方向的问题的重要性，考察了重大而富有成果的问题的特点，阐述了对于问题的"解答"的要求。第二部分是"问题"，在这部分中，他提出并讨论了23个具体的问题。头6个问题与数学基础有关，具有较大的一般性，这些问题反映出数学基础方面的工作对他的强烈影响和他对公理方法的效用的巨大热情。其它的问题都是专门的和个别的问题，全是选自希尔伯特本人过去、

现在或将来所关心的数学领域。第三部分是讲演的结束语，在这部分中，他强调了数学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系，指出数学的有机的统一，是这门科学所固有的特点。

正如闵可夫斯基当初所预料的，希尔伯特的这席讲演，“在今后几十年的时间里将成为人们议论的话题。”领悟希尔伯特巴黎讲演的精神，对今天的数学和数学哲学研究仍然有着深远的意义。

在讲演的开头，希尔伯特就明确指出数学中的问题直接涉及到数学的发展，特别是数学的未来。

我们当中有谁不想揭开未来的帷幕，看一看在今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？

历史教导我们，科学的发展具有连续性。我们知道，每个时代都有它自己的问题，这些问题后来或者得以解决，或者因为无所裨益而被抛到一边并代之以新的问题。如果我们想对最近的将来数学可能的发展有一个概念，那就必须回顾一下当今科学提出的、期望在将来能够解决的问题。现在，当此世纪更迭之际，我认为正适于对问题进行这样一番检阅。因为，一个伟大时代的结束，不仅促使我们追溯过去，而且把我们的思想引向那未知的将来。

接着，希尔伯特具体展开了他关于数学问题的思想方法，为了便于理解和领悟希尔伯特的思想方法，我们把讲演的以下部分按所论述的内容分类加以分析，并对讲演中所直接涉及到的有关数学史知识作以适当的介绍。

1. 数学问题的意义。在讲演中，希尔伯特从两个方面论述了问题的重要性：一是问题在一般科学进展中的深远意义。希尔伯特认为，一门科学的生命力在于它能够产生大量重要而富有价值的问题，他指出"只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题。"二是问题在研究者个人工作中的重要意义。希尔伯特指出，通过研究和解决问题，研究者个人可锻炼其克服困难的顽强意志，发现新方法和新观点。他把问题比作试金石，通过它，数学家们可以检验所运用方法的价值，衡量他们的能力。

为了说明以往的数学家为什么惯于以巨大的热情去致力解决那些特殊的难题，以及这些难题的价值，希尔伯特提到了约翰·伯努利（Johann Bernoulli，1667～1748）、费尔马、彭加勒、外尔斯特拉斯等人的工作。

1696年，瑞士数学家约翰·伯努利向全欧洲数学家挑战，在6月号的《教师学报》上提出了一个难题：设在垂直平面内有任意两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点下滑至较低点，不计摩擦，问沿着什么曲线下滑的时间最短？这就是历史上有名的"最速降线问题"，这是一个求极值问题，它的难度在于和普通的极值求法不同，它要求给出一个未知函数（曲线）来满足所给定的条件。在公开宣布这一问题时，伯努利说：经验告诉我们，正是摆在面前的那些困难而同时也是有用的问题，引导着有才智的人们为丰富人类的知识而奋斗。早在1630年，伽利略(Galilei，1564～1642)就研究过这个问题，他认为所求的曲线是一条圆弧，这个答案是错误的。约翰·伯努利把这个

问题重新提了出来，引起当时许多数学家的兴趣。牛顿在1697年1月29日得知这一消息后，当天便把这一问题解决了。莱布尼茨、洛比达（G. F. AL' Hospital, 1661～1704）、约翰·伯努利本人以及他的哥哥雅各·伯努利（Jacob Bernoulli, 1654～1705）也都求得了正确的答案：所求的曲线是一条旋轮线弧。所有这些解法都发表在1697年5月号的《教师学报》上。约翰·伯努利的解法是受费尔马光学折射定律的启示，比较直观。雅各·伯努利的解法是几何化的，具有一般性，是在变分法方向上迈出的一个较大的步伐。雅各·伯努利还对上述问题作了推广：决定曲线的形状，使得一个质点从一给定点以特定的初速度沿这一曲线滑向一条直线的任一点时，所花的滑动时间最小。雅各·伯努利给出这一问题的答案是：这条曲线是一条与给定直线相交的旋轮线。后来，有人又把问题进一步推广为：把上述给定的点改为一条曲线，求前一条曲线上某一点到后一条曲线上某点的一条路径，使质点沿这条路径滑动所需的时间最少。这类问题叫作“具有变动端点的最速降线问题”。1734年，欧拉进而又把问题推广到阻尼介质情况。他的研究成果发表在1744年的一本书《寻求具有某种极大或极小性的曲线的技巧》中。在这本书中，欧拉给出了问题的一般解法。这本书的问世，标志着变分学已经正式诞生，同时给欧拉带来了巨大的声誉。针对伯努利提出和解决最速降线问题的这段历史，希尔伯特指出：“伯努利因此而博得数学界的感谢。变分学的起源应归功于这个伯努利问题和相类似的一些问题。”

1637年，费尔马在注释丢番图（Diuphantus, 约250）的《算术》时，在书中提到的命题“将一个平方数分为两个平方数之和”旁边写道：“不可能把一个立方数表为两个立方数之和，或把一

个四次方数表为两个四次方数之和，一般地，不可能把任一个次数大于2的方幂表示成两个同方幂的和。”简言之就是方程

$$x^n+y^n=z^n,$$

当$n\geqslant3$时没有非零的整数解。这就是历史上有名的费尔马大定理。费尔马还写道，他已经发现了这个命题的证明，只是由于书上的空白处太窄，不能把这个证明写下来。这段话给费尔马大定理增添了有趣而又神秘的色彩。这个定理可分成两种情况：一是证明$x^4+y^4=z^4$无非零整数解；二是证明$x^p+y^p=z^p$无非零整数解，其中P是奇素数。第一种情况是很容易证得的，难就难在证明第二种情况。数学家们无法直接证明对任意奇素数P费尔马大定理都成立，只好对P的一些特殊情况分别加以证明。1770年，欧拉首先证明了$P=3$的情况；1823年勒让德以及1825年狄里克莱先后证明了$P=5$的情况；1839年法国的拉梅证明了$P=7$的情况……。为了鼓励数学家攻克费尔马大定理的证明，1850年和1853年法国政府曾两次提出二千法郎的悬赏。1908年，德国哥廷根皇家科学会提出十万马克的悬赏。尽管如此，费尔马大定理的证明至今仍未找到。

可是，人们对费尔马大定理证明的努力并没有白费，因为在证明尝试过程中提出了许多具有珍贵价值的科学思想。库麦尔的理想数论就是其中的典型。库麦尔是高斯和狄里克莱的学生，后来在布勒斯劳大学和柏林大学任教授，他的工作主要是在数论方面。1843年，为了证明费尔马大定理，他假定代数数的唯一因子分解成立，狄里克莱告诉他这个假定是错误的。为了在代数数中重建唯一因子分解定理，库麦尔从1844年开始发表了一系列有关论文，在这些论文中他创立了理想数的理论。库麦尔的思想被代德金和克隆尼克推广到任意代数域，对整个

数论的发展产生了深远的影响。对此，希尔伯特用费尔马大定理的历史，来说明人们在尝试解决问题的过程中，有可能得到比问题本身更为有价值的成果。用他自己的话说就是："证明这种不可解的尝试，提供了一个明显的例子，说明这样一个非常特殊、似乎不十分重要的问题会对科学产生怎样令人鼓舞的影响。事实上，正是受费尔马问题的启发，库麦尔引进了理想数，并发现了把一个循环域的数分解为理想素因子的唯一分解定理，这一定理今天已被代德金和克隆尼克推广到任意代数域，在近代数论中占有着中心地位，而且其意义已远远超出数论的范围而深入到代数和函数论的领域。"据说，有人曾问希尔伯特为什么不去证明费尔马大定理，他说，即使自己有能力解决这个问题，也不想去彻底解决它，因为他不愿意杀掉这个"生金蛋的母鸡"。

希尔伯特以彭加勒对三体几何问题的研究，说明在研究问题过程中，有时可以发现和建立一些卓有成效的新方法。三体问题也是历史上的著名难题。三体问题的研究开始于牛顿，它是二体问题研究的自然延伸，又是n体问题的一种特殊情况。在引力相互作用下两个球体的运动问题，是由牛顿在他的《自然哲学的数学原理》中，用几何方法解决的。用分析方法研究行星运动开始于丹尼尔·伯努利（D. Bernoulli，1700～1782）。1734年他用分析方法研究二体问题的论文，使他获得了法国科学院的奖金。由于三体问题，特别是对太阳、地球和月亮这三个星体的研究，对航海和天文学很重要，而且直接涉及到微分方程的许多重要问题，所以从18世纪开始，它便成为数学家们认真关注的一个重要课题，许多著名数学家都曾以巨大的热情研究过它。三体问题的复杂性，使它很难得到精确的解答。人们对这个问题的研究选择了两个方向：一是建立阐明三体运动机

理的定理；二是寻求特殊情况的精确解和一般情况的近似解。所谓一般情况，就是考虑摄动的因素。为了计算摄动，人们提出了参数变值法，这是一个很有效的方法。牛顿曾运用这个方法计算了太阳对月球轨道的影响。欧拉在1748年的一篇论文中用这个方法研究了木星和土星的相互摄动，获得了法国科学院的奖金。拉格朗日在1772年的得奖论文“论三体问题”，拉普拉斯在他的1779年的名著《天体力学》中，都相继运用和发展了这一方法。三体问题成为推动微分方程发展的一个主要课题。彭加勒对三体问题研究开辟了一条新的途径。在三体问题研究中，为了考察微分方程的解的性质，彭加勒创立了微分方程特别是非线性微分方程的定性理论，讨论了所有可能的解的类型。彭加勒的工作为天文学研究提供了行之有效的数学工具。对于这段历史，希尔伯特写道：“由彭加勒引进到天体力学中来的那些卓有成效的方法和影响深远的原则，今天也被实用天文学家所确认和应用，而它们正是起因于彭加勒对三体问题的研究；他重新研究了这个困难问题，并使它更接近于解决。”

为了说明问题的重要性，希尔伯特还提到了雅可比逆问题对外尔斯特拉斯的影响。雅可比是椭圆函数论的创立者之一，另一个创立者是挪威青年数学家阿贝尔（N. H. Abel，1802～1829）。阿贝尔是一个遭遇不幸的青年数学家，他解决了历史上有名的“五次方程的代数解法问题”，提出了椭圆函数论中著名的“阿贝尔定理”，与雅可比共同奠定了椭圆函数论的基础。然而，他的才华未能得到充分发挥之前，就在贫困交迫中郁郁去世。他的关于椭圆函数的论文，由于权威的压制被搁置了15年之久，直到他逝世后的11年，才由雅可比代为发表。雅可比独到地研究了椭圆函数的性质，他引进了θ函数，得到了θ

函数的各种无穷级数和无穷乘积的表示式，把椭圆函数理论建立在θ函数的基础上。

雅可比研究了亏格为 2 的第一种超椭圆积分

$$\int^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{f_6(x_1)}}\text{和}\int^{x_2}\frac{x_2dx_2}{\sqrt{f_6(x_2)}},$$

(其中$f_6(x)$是x的一个六次多项式)，得到了四重周期的多值函数。他把上面的各个积分分别换成两个积分的和来考察

$$u_1=\int^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{f_6(x_1)}}+\int^{x_2}\frac{dx_2}{\sqrt{f_6(x_2)}},$$

$$u_2=\int^{x_1}\frac{x_1dx_1}{\sqrt{f_6(x_1)}}+\int^{x_2}\frac{x_2dx_2}{\sqrt{f_6(x_2)}}。$$

他发现x_1和x_2的对称函数 $s_1=x_1+x_2$与$s_2=x_1x_2$都是u_1、u_2的四重周期的单位函数。他进而猜想，函数 s_1、s_2可以用u_1和u_2的θ级数来表示。这一猜想被罗森汉（J. G. Rosenhain，1816～1887）和古倍尔（A. Güpel）所证明。人们把这些结果推广到亏格$g\geqslant1$的超椭圆积分以及一般的阿贝尔积分上，就是所谓的雅可比逆问题：设W_1，$\cdots W_g$是亏格为g的代数曲线上的线性无关的微分，对于任意给定的复数向量（u_1，$\cdots u_g$），求满足关系式

$$\sum_{i=1}^{g}\int^{p_j}\omega_i\equiv u_i(mod\text{周期}),\ i=1,\ \cdots,\ g$$

的点组（$p_1,\cdots,p_g$)，并且把它作为（$u_1,\cdots u_g$)的函数具体地表示出来。这个问题对于研究阿贝尔函数十分重要，它成为19世纪中叶数学家们感兴趣的一个中心问题。

1841年，26岁的外尔斯特拉斯为了获得中学教师资格证书，向考试委员会提交了 3 篇论文，有一篇是由古德曼为他出

的题，内容是求椭圆函数幂级数的展开式。自此之后，外尔斯特拉斯就把椭圆函数作为自己走上科学生涯的第一个主攻目标，他认真研读了阿贝尔和雅可比的著作。有一天，他彻底研究雅可比函数，竟忘记了第二天早上去教室给学生上课。外尔斯特拉斯在研究雅可比逆问题过程中，发表了一系列的文章。他的工作使雅可比、阿贝尔开创的椭圆函数理论更加完备和丰富。外尔斯特拉斯因研究椭圆函数理论特别是雅可比逆问题而受到学术界的重视，一举成名。在他转向其它课题时，他在讲演中经常提到他在椭圆函数理论上所作的工作，他认为他的极大幸运是在其科学事业之初，就找到了象雅可比逆问题这样一个重要的可供研究的问题。希尔伯特指出，有的问题只对某一分支的发展表现出明显的意义，如费尔马问题推动了抽象数论的发展，三体问题促进了对天体运动这类自然现象的理解。也有一类问题，它们“会在极不相同的数学分支中获得应用”。如短程线问题在几何基础、曲线曲面论、力学和变分学中，正多面体问题在初等几何、群论、方程论以及线性微分方程理论中，都有着十分重要的作用。这类问题的提出和解决，往往会同时导致几个数学分支的发展。

2. 好的数学问题的特征。数学中存在着大量尚待解决的问题，但并非每个问题都是好的问题，都值得人们去研究和解决。希尔伯特认为，一个好的数学问题一般应体现有这样三个特征：

第一，清晰性和易懂性。“清楚的、易于理解的问题吸引着人们的兴趣，而复杂的问题却使我们望而怯步。”

第二，困难但又给人以希望。“为着具有吸引力，一个数学问题应该是困难的，但却不应是完全不可解决而致使我们白

费力气。”

第三，意义重大。“在通向那隐藏的真理的曲折道路上，它应该是指引我们前进的一盏明灯，最终并以成功的喜悦作为对我们的报偿。”

希尔伯特在前面谈到的最速降线问题、费尔马大定理、三体问题、雅可比逆问题、短程线问题和正多面体问题，都明显表现有这三个特征，因而都是好的数学问题。

一个好的数学问题必定是有重大价值的，那么，怎样判断一个数学问题的价值性？能否在着手研究问题之前就预先判断出该问题的价值？希尔伯特认为：“想要预先正确判断一个问题的价值是困难的，并且常常是不可能的；因为最终的判断取决于科学从该问题得到的效益。”也就是说，一个数学问题的价值只能在解决这个问题的过程及其最后结局中才能正确判断出来。例如，欧氏第五公设问题自公元前三世纪提出，到19世纪20年代发现非欧几何，历经了二千多年才充分显示出其自身的重大价值；费尔马大定理经过二百年的证明尝试，库麦尔从中引出理想数，人们才认识到它是一个“生金蛋的母鸡”。

3. 数学问题的源泉。在分析了问题在数学中的重要性以及一个好的数学问题的特征之后，希尔伯特提出了这样一个认识论问题：“数学这门科学究竟以什么作为其问题的源泉呢？”他的解答是十分明确的，他认为，产生数学问题的源泉有两个：一是经验世界，二是数学理论内部。

实践是人们认识的总源泉，自然也是数学问题取之不尽、用之不竭的丰富源泉。数学是反映现实世界中的量及其关系的，因此，最初的数学问题无疑是来自外部世界，是由现实世界提供的。希尔伯特正是认识到了这一点，他指出：“在每个

数学分支中，那些最初的、最老的问题肯定是起源于经验，是由外部的现象所提出。”对此，他指出，最初的几何问题，诸如二倍立方体问题、化圆为方问题，以及数值方程、曲线论、微积分、富立叶级数和位势理论中的那些最初的问题，都是由外部的现象世界提供的，更不用说更大量的、属于力学、天文学和物理学方面的数学问题了。

数学的发展依赖于社会实践，又有自身的相对独立性。希尔伯特同样认识到了数学发展的这一客观规律，他指出："随着一门数学分支的进一步发展，人类的智力，受着成功的鼓舞，开始意识到自己的独立性。它自身独立地发展着，通常不受来自外部的明显影响，而只是借助于逻辑组合、一般化、特殊化、巧妙地对概念进行分析和综合，提出新的富有成果的问题，因而它自己就以一个真正提问者的身份出现。这样就产生出素数问题和其它算术问题以及伽罗华的方程式理论、代数不变量理论、阿贝尔函数和自守函数等方面的一系列问题。确实，近代数论和函数论中几乎所有较深入的问题都是以这样的方式提出的。”

数学内部问题是数学内部矛盾运动的反映，这种反映有多种表现形式，希尔伯特在这里大体概括为三种：借助逻辑组合，借助一般化，借助特殊化。

借助逻辑组合提出问题，就是通过改变原有数学理论的结构，形成各种新的结构，并考察这些新结构可能的发展，以从中选择和建立新的数学理论。非欧几何的发现，就是以这种方式提出和解决问题的结果。我们知道，非欧几何并不是在人们的经验和实践基础上概括总结出来的几何学理论，而是在解决欧氏几何学的内部矛盾——第五公设的可证性问题过程中发现

和建立起来的。为解决这一问题，罗巴切夫斯基对欧氏几何公理系统的公理组作出新的逻辑组合，他把原来的平行公理（第五公设）用它的否定命题代替，和其它的公理组成新的公理组，从这个新公理组出发，逻辑推演出非欧几何的各种命题。

借助一般化提出问题，就是对具体的特殊问题的条件或内容加以适当改变，使改变后的问题比原问题具有较大的一般性。例如，n维空间两点之间的距离问题，n次代数方程的根式求解问题，无穷多个变元的线性方程组求解问题，就是通过一般化提出来的。不变量理论中的著名果尔丹问题：对已给定数目的变量和次数的型，求其基本的不变量，也属于这一类问题。

与借助一般化提出问题相反，所谓借助特殊化提出问题，就是把原来问题的条件或内容加以适当限制，使新问题比原问题更为具体。马克劳林级数就是求解特殊化问题的结果。

1712年，泰勒（B. Taylor，1685～1731）用插值法给出了以他的名字命名的函数幂级数展开式

$$f(a+h)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{n}(h)\frac{h^{n}}{n!}。$$

1742年，马克劳林（C. Maclaurin，1698～1746）把函数幂级数展开问题加以特殊化，用待定系数法给定了$a=0$时的函数幂级数展开。他在《流数论》一书中曾说明自己的工作实际上是完成泰勒级数的一个特殊情况。

希尔伯特认为，来自外部现象的数学问题和来自数学内部的问题常常是交互在一起起作用的，特别是从数学内部产生的问题只有受到来自数学外部力量的作用，才能结出丰硕的果

实。数学的历史证明，希尔伯特的看法是完全正确的。以虚数为例，虚数产生于16世纪，是解决数学内部问题的产物。由于虚数长时间得不到实际应用，在长达三百多年的时间没有得到任何实质上的发展。只是到了19世纪虚数得到平面上的直观表示，在流体力学、电工计算、机械设计、大地测量等方面获得了用场，才迅速发展起来并最终导致复变函数理论的建立。圆锥曲线论、三角级数理论、罗巴切夫斯基几何、黎曼几何，都属于这种情况。

针对当时数学界乐观地崇尚抽象理论，忽视实际问题的倾向，希尔伯特强调在数学研究中，要把解决抽象的理论问题和解决具体的实际问题结合起来，尤其是要珍惜和重视那些来源于现实世界的具体问题。他说："一个新的问题，特别是当它来源于外部经验世界时，很象一株幼嫩的新枝，只要我们小心地、按照严格的园艺学规则将它移植到已有数学成就粗实的老干上去，就会茁壮成长开花结果。"在数学史上，这样的事例是举不胜数的。哥尼斯堡七桥问题，经欧拉之手成为拓扑学的萌芽；绘画中的透视问题，最终引导出射影几何的建立；弦振动方程问题，成为偏微分方程论的生长点；最速降线问题和等周问题，直接导致变分学的产生，等等。

4．解答数学问题的一般要求。提出数学问题的目的是解答它们，那么解答数学问题有什么一般要求呢？希尔伯特认为，对于数学问题来说，其解答一般应满足两条要求：一是求解过程要严格，二是求解方法要简单。

逻辑的严格性，是数学这门科学的显著特征之一。数学的推理和演算是严格按着逻辑规则进行的，任何直观和特例都不可作为数学的证明。对于数学问题求解严格性要求的含义，希尔

伯特指出："要有可能通过以有限个前提为基础的有限步推理来证明解的正确性，而这些前提包含在问题的陈述中并且必须对每个问题都有确切定义。"这种严格性要求在数学中已经象座右铭一样变得众所周知。

在数学中，求解问题的简单性要求是勿庸置疑的。希尔伯特认为，事情不在于严格性和简单性要求本身，而是在于人们常常把严格性与简单性要求对立起来，认为简单会造成不严格，要实现严格就不能达到简单。对此，希尔伯特指出："把证明的严格化和简单化绝然对立起来是错误的。相反，我们可以通过大量例子来证实，严格的方法同时也是比较简单、比较容易理解的方法。正是追求严格化的努力驱使我们去寻求比较简单的推理方法。这还常常会引导出比严格性较差的老方法更有发展前途的方法。"在希尔伯特的工作中，我们到处可以看到他正确处理严格性和简单性辩证关系的实例。解决果尔丹问题，拯救狄里克莱原理，建立形式公理化系统，都是他追求严格化和简单化统一的表现。

从19世纪下半叶开始，随着分析严密化运动的完成，算术和分析的地位急骤上升。特别是非欧几何的创立和发展，使数学家们认识到，建立在几何直观上的证明往往会使人上当受骗，他们担心在以后的数学研究中还会继续出现这种现象，因此他们宁愿把数学建立在数的基础上，并且在数的基础上建立起整个几何学。如果说在以往的世纪里，数学家们信仰的是柏拉图的观点："上帝一直在进行几何化"，那么到了19世纪下半叶，这种信仰则变成了："上帝一直在进行算术化"。随着分析概念的严密化以及数学算术化趋势的出现，给不少数学家造成了这样一种错觉，认为只有分析的概念，甚至只有算术的

概念才能严格地处理问题，而几何、力学和物理学中提出的概念是靠不住的，因为这些概念保证不了数学所需要的严格性。

希尔伯特坚决反对数学中出现的这种重分析轻几何的不健康思想，他指出："在坚持把证明的严格性作为完善地解决问题的一种要求的同时，我要反对这样一种意见，即认为只有分析的概念，甚至只有算术的概念才能严格地加以处理。这种意见，有时为一些颇有名望的人所提倡，我认为是完全错误的。对于严格性要求的这种片面理解，会立即导致对一切从几何、力学和物理中提出的概念的排斥，从而堵塞来自外部世界的新的材料源泉，最终实际上必然会拒绝接受连续统和无理数的思想。这样一来，由于排斥几何学和数学物理，一条多么重要的、关系到数学生命的神经被切断了！"希尔伯特认为，克服来自几何学、力学和物理学概念不严格性的最有效方法，是把这些概念建立在公理系统之上，从而使这些概念无论在精确性还是在严格性方面都不会比分析和算术的概念差。希尔伯特1899年的《几何基础》一书，实际上就是为实现几何的严格化而撰写的。

希尔伯特还论述了数学符号在严格证明中的作用和意义。他认为，新符号必须服从新概念，符号的选择要使它们能令人想起曾经是形成新概念的缘由的那种现象。他指出："算术符号是文字化的图形，而几何图形则是图象化的公式；没有一个数学家能缺少这些图象化的公式，正如在数学演算中他们不能不使用加、脱括号的操作或其它的分析符号一样。"他还指出，几何图形作为图象化的公式，不可随意使用，它们的使用要由几何的公理及其组合来决定。希尔伯特关于数学符号的性质和作用的论述，对于我们科学地选择新符号，充分发挥符号

在数学研究中的作用，是有重要方法论意义的。

5. 克服数学问题求解困难的常用方法。在求解数学问题时，常常要遇到一些困难，怎样克服这些困难呢？希尔伯特从两个方面论述了在数学问题求解中遇到困难的原因以及克服这些困难的办法。

第一，“在解决一个数学问题时，如果我们没有获得成功，原因常常在于我们没有认识到更一般的观点，即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节。”也就是说，对于这种情况，解决困难最有效的办法是从最一般的观点来研究所要解决的问题，这样作“不仅我们研究的问题会容易得到解决，同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法。”希尔伯特出奇制胜解决著名的果尔丹问题，可作为采用这种办法获得成功的一个典型例子。我们知道，自从果尔丹证明了二次型存在一组有限基，数学家们便开始把果尔丹的证明推广到比二次型更复杂的代数形式上去。他们使用果尔丹建立的算法工具，企图对每一个给定的型构造出一组有限基来，然而，这种努力只能对某些特殊的代数形式有效，而对于更多的复杂的代数形式却不能奏效。希尔伯特把眼下要解决的问题改换成了更一般的形式：“假如给定了无穷多个包含有限个变量的一组代数形式系，问在什么条件下，存在一组个数有限的代数形式系，使得所有其它的形式可以表成它们的线性组合，系数是原来那些变量的有理整函数？”他抛开果尔丹的算法工具，采用存在性证明方法，最终得到的答案是：这样的形式系总是存在的。希尔伯特采取这种统一的、一般性的观点，不仅使果尔丹问题变得容易解决，而且提出和确立了具有普遍意义的存在性证明方法。

第二，“在讨论数学问题时，我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用。可能在大多数场合，我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因，是在于这样的事实，即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决。这时，一切都有赖于找出这些比较容易的问题，并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们。”希尔伯特在这里强调，有时通过对一般性问题加以特殊化，可以有效解决数学研究中的困难。他十分喜欢处理数学问题的这种特殊化办法，把它称作是“克服数学困难的最重要的杠杆之一”。

希尔伯特拯救“狄里克莱原理”的成功，深刻体现了他化一般问题为特殊问题的思想方法。黎曼提出的狄里克莱原理是：狄里克莱积分

$$D(u)=\iint_G\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy,$$

对于给定的边界条件具有极小值的函数u，且满足位势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0。$$

在这个定理中隐含着使狄里克莱积分$D(u)$具有极小值的函数u一定存在。黎曼没有从逻辑上严格论证这个前提，而是借助于物理直观确立的。外尔斯特拉斯通过构造一个反例否定了狄里克莱原理的普遍有效性，使这个原理因缺少严格性而从数学家的视线里消失了。希尔伯特拯救狄里克莱原理的思路是，外尔斯特拉斯的反例否定了狄里克莱原理的普遍适用性，那么，是否可适当限制问题的条件，使狄里克莱原理在限定的条件范围内成立，而又不失去这个原理的实用价值。为此，他对狄里克莱积分函数曲线的边界性质加上某些特殊的要求，使这个一

般性问题化为比较特殊的问题，然后再解决得到的这个特殊的问题。沿着这条思路，他取得了预期的成功，既恢复了狄里克莱原理的应用价值，又在一定范围内保证了它的可靠性。

6. 数学问题的可解性。希尔伯特相信每个数学问题都可以得到解决，只不过是解决的方式有所不同罢了。他认为："每个确定的数学问题都应该能得到明确的解决，或者是成功地对所给问题作出回答，或者是证明该问题解的不可能性，从而指明解答原问题的一切努力都肯定要归于失败。""这种相信每个数学问题都可以解决的信念，对于数学工作者是一种巨大的鼓舞。"针对当时某些数学家和哲学家对未知世界认识的悲观情绪，希尔伯特以他那特有的乐观精神说出了这样一句鼓舞人心的名言："在数学中没有ignorabimus（不可知）"。

在这里，希尔伯特深刻分析了不可能问题在数学研究中的特殊价值。所谓不可能问题，是指前提不充分或提法不正确的问题。在数学史上曾出现过不少有名的不可能问题，如用整数来表示等腰直角三角形斜边与直角边的比，几何作图三大难题，欧氏第五公设试证问题，五次代数方程根式求解等等。上述不可能问题通常表现有如下两个特征：

第一，隐蔽性。不可能问题的真实本质往往隐蔽得很深，而且大都开始以"可能问题"的面目出现，难以在短期内被辨识出来，有的甚至要经人们数年、数十年、数百年，甚至上千年的反复尝试解决，才能将其不可能求解的本质真正揭示出来。几何作图三大难题，自公元前5世纪提出，历经二千三百多年，被确认为尺规作图不可能问题；欧氏第五公设试证问题，自公元前3世纪提出，历经二千二百多年，被确证为证明不可能问题；五次代数方程根式求解问题，自16世纪提出，历

经三百来年，被确证为求解不可能问题。

第二，吸引性。不可能问题大都是从已解决的可能问题自然延伸出来的，能够给人以似乎成功的希望，并且通常具有莫大的魅力，吸引众多的数学家为之奋斗，使人产生一种不达目的不罢休的劲头。以几何作图三大难题为例。当古希腊学者使用直尺和圆规成功地解决任意角的二等分以及直角的三等分问题后，自然想到对任意角进行三等分，于是便产生"三等分角"问题；当他们使用直尺和圆规成功地作出一个面积为已知正方形面积二倍的正方形之后，自然想到把问题从平面图形推广到立体图形，由此便产生出"二倍立方体"问题；同样，当他们使用直尺和圆规成功地把一个直线形化为等积的正方形之后，自然提到把一个圆化为与其等积的正方形，这就产生了"化圆为方"问题。正是这种自然的延伸和以往的成功，激起了数学家们求解几何三大难题的极大热情，并且相信一定能够达到目的。

由于不可能问题具有上述两个显著特征，所以它们常常成为许多数学家的奋斗目标，有人甚至为尝试解决它们花去了毕生的精力。几乎世界上每一个重要的科学研究机关，都曾收到过数以千计的"三大难题"解答者的来信。自然，这些"解答"都有逻辑上的漏洞。为了摆脱这种无休止的纠缠，1775年巴黎科学院不得不通过一项决议，不再审查有关"几何作图三大难题"的论文。可是，这"三大难题"仍然以其特有的魅力吸引着许多人。1837年，凡齐尔（P. L. Wantzel，1814～1848）借助解析几何给出了"三等分角"、"二倍立方体"不可能性的证明；1882年，林德曼通过证明π的超越性，解决了"化圆为方"的不可能性；1895年，克莱因又进一步给出了"三大难

题”不能用尺规完成的简单而明晰的证明。然而，近百年来醉心于解“三大难题”的人还是大有人在，足见这“三大难题”的魅力。

在数学研究中，人们总是希望所研究的问题是可能的，而不希望遇到那些不可能问题，因为不可能问题的出现常常给研究者带来长期的挫折和失败。非欧几何的发现者之一亚·鲍耶的父亲数学家法·鲍耶，曾致力于第五公设证明长达20多年，到头来没能取得任何有希望的进展。当他得知儿子亚·鲍耶步他的后尘，醉心于研究这一问题时，极力劝阻他停止这项研究。他结合自己的亲身经历告诫儿子："希望你不要再作克服平行线理论的尝试了。你会花掉所有的时间而终生不能证明这个问题……，它会剥夺你一切余暇、健康、休息和所有的幸福。这个地狱般的黑暗将吞吃成千个象牛顿那样的巨人……，这是永远留在我心里的巨创。”法·鲍耶的话反映了当时一部分数学家对不可能问题的悲观态度。

希尔伯特对不可能问题的态度是积极乐观的，他十分重视不可能问题在科学发展中的地位和作用，他以永动机问题说明求解不可能问题有时会导致重大的发现。他指出："通过不可能性的证明，这些问题被一种对科学来说是最满意、最有用的方式解决了。我想援引永动机问题。在构造永动机的努力失败以后，科学家们研究了在这种机器不可能存在的情况下，自然力之间必须存在的关系；而这个反问题引导到能量守恒定律的发现，它反过来又解释了原来希望制造的永动机的不可能性。”欧氏第五公设试证和五次代数方程根式求解等问题，就是数学中的“永动机问题”，对它们的尝试努力失败后，数学家们研究了在“这种证明”和“这种求解”不可能存在的情况下，第

五公设和其它公理之间，五次代数方程的根与系数之间必然存在的关系，而对这些反问题的研究，最终导致了非欧几何的发现和群论的产生，它们反过来又深刻解释了第五公设证明和五次代数方程根式求解的不可能性。

在数学研究中，有时会遇到一些虚假的不可能问题。所谓虚假的不可能问题，是指那些由于某种原因，诸如传统观念的束缚、认识水平的限制、思想方法的不当等而被误认为“不可能”的可能问题。例如，从欧几里得时代起，人们就认为正17边形的尺规作图是不可能的，可是1796年19岁的高斯却发明了用直尺和圆规进行正17边形的作图法；再如，从17世纪微积分创立起，人们就认为计算处处没有切线的曲线的长是不可能的，可是1902年27岁的勒贝格却通过改进传统的黎曼积分，使计算处处没有切线的曲线的长成为可能。这就告诉我们，判定一个问题是否为不可能问题，不在于人们在这个问题上是否遭到了长期的失败，而在于是否能找到一种合适的方法从理论上证明这个不可能性。

7. 数学的有机统一性。19世纪以来的数学发展与以往数学的发展相比，其分化的程度越来越高，新的分支学科越来越门类繁多，新分支的内容越来越狭窄。每门学科都有其特定的内容和专门术语。这就使得不同学科的研究者之间难以建立起共同的语言，难以弄清彼此研究课题之间的深刻联系。在这种情况下，要想掌握数学领域中三分之一以上的知识，看来都是不可能的。面对已经充分显示出来丰富内容、分支繁多的数学，不少数学家流露出了一种忧虑和悲观情绪：数学会不会被分割成许多孤立的分支，它们的关系会不会变得松懈起来？面对这种情绪，希尔伯特以其深邃的洞察力和远见卓识的眼光给予了

这样的回答："我不相信有这样的情况，也不希望有这样的情况。我认为，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各个部门之间的联系。""数学的有机的统一，是这门科学固有的特点，因为它是一切精确自然科学知识的基础。"

那么，数学的有机统一性表现在哪里呢？希尔伯特指出："尽管数学知识千差万别，我们仍然清楚地意识到：在作为整体的数学中，使用着相同的逻辑工具，存在着概念的亲缘关系，同时，在它的不同部分之间，也有大量相似之处。我们还注意到，数学理论越是向前发展，它的结构就变得越加调和一致，并且，这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系。"从这段话可以看出，希尔伯特把数学的有机统一性大体概括为四个方面：

第一，逻辑工具的相同性。数学是一门演绎科学，在它的各个分支学科中，无论是命题证明还是数值计算，都是以严格的演绎推理为依据进行的，演绎推理是数学中普遍应用的一种相同的逻辑工具。公理法作为演绎推理的一种形式，则是建立各门数学理论的相同的逻辑工具。

第二，概念之间的亲缘性。数学中的概念是千差万别的，每个数学分支都有其特定的概念。然而，这些千差万别的概念并不是相互隔绝、毫无关系的，而是彼此之间有着这样或那样的联系，形成一个具有或远或近亲缘关系的大家族。我们在数学中所经常遇到的概念之间的从属关系、合成关系、对应关系和对偶关系等，就是数学概念亲缘性的典型表现。

第三，学科之间的相似性。如果我们仔细审视数学各个分支学科的内容，不难发现，在不同的学科中，许多问题的提法、

解决问题的方法以及概念的表述有着许多相似之处。例如布尔代数、集合运算、命题演算和概率事件的运算，虽然各属于不同的数学分支，但是它们之间有着极为相似的运算原则和运算关系。

第四，理论结构调和一致性。作为整体的数学，是有结构层次的，这种结构层次并不会因新学科的大量出现而遭到削弱。相反，随着各种新学科的不断产生以及不同学科相互渗透、相互作用的加强，数学的结构层次将变得越加有序和协调。正因为如此，才使得数学家们有可能提出统一数学各分支的各种观点、理论和新方法。而这些统一性观点、理论和新方法的提出，又会使数学的结构层次变得更加协调一致。

1872年，克莱因在其有名的爱尔朗根纲领中，提出用群的观点来统一各种几何学；1930年，毕尔霍夫建立了格论，用以统一代数系统的各种理论和方法；30年代末，法国布尔巴基学派提出用结构的观点来统一已有的数学理论；40年代末，美国的麦克伦（S. Maclane，1909～）等人提出用范畴和函子理论，以此作为统一数学的基础。希尔伯特本人也为加强数学的有机统一性作出了卓越贡献，他倡导的公理化运动，实质上就是要把数学建立在公理系统的基础上。这些数学家为探讨数学结构的一致性而作出的努力，在很大程度上促进了数学各门理论的协调发展。

三　希尔伯特23个问题

希尔伯特在“数学问题”讲演中，提出了23个重要而又留待解决的问题（见本书附录部分），这23个问题通常简称为“希尔伯特问题”。它们是希尔伯特从前辈人遗留下来的和当

代人新提出的纷繁众多的问题中，精心挑选出来的。这些问题涉及数学的广泛领域，横跨数学基础、几何基础、拓扑群论、数学物理、数论、函数论、不变量理论、代数几何学、微分方程论和变分学等众多数学分支学科。

希尔伯特问题的选择虽然受到当时数学发展水平的限制，受到希尔伯特个人科学素养、研究兴趣及思想方法的影响，不可避免地带有一定的局限性，但仍然不失为通往数学未来的窗口，透过它可以使我们看到数学这门科学发展的某些前景。由于希尔伯特在世界数学界的巨大声望，使得一个数学工作者只要成功解决了这23个问题中的任何一个，就会由此而赢得巨大的声誉。

在希尔伯特讲演的当年，他的学生22岁的德恩就给出了第三个问题的部分解答，次年获得完全解答，于是德恩的名字被载入20世纪数学史册。迄今为止，约占一半的问题已得到完满解决，尚有三分之一的问题仍悬而未决，还有几个问题提法比较笼统，难以判定解决程度。1975年，在美国的伊利诺斯大学召开的一次国际数学会议，专门研究和总结了希尔伯特问题的进程情况，并出版了介绍各个问题解答进展的论文集。下面就是希尔伯特23个问题的解决情况。①

1. 康托尔的连续统基数问题。1874年，康托尔猜测在可数集基数和实数集基数之间没有别的基数，即著名的连续统假设。1938年，侨居美国的奥地利数学家哥德尔证明连续统假设和ZF集合论公理系统的无矛盾性。1963年，美国数学家科恩（P. Cohen，1934～）证明连续统假设和ZF公理是彼此独立

① 参见张奠基、赵斌，《二十世纪数学史话》，知识出版社1981年。

的。因此，连续统假设不能用世所公认的ZF公理证明其对错。希尔伯特第一个问题在这一意义上已获解决。

2。算术公理的无矛盾性。欧氏几何的无矛盾性可归结为算术公理的无矛盾性。希尔伯特曾提出用形式化计划的证明论方法加以证明。哥德尔在1931年发表不完备性定理加以否定。1936年根茨（G. Gentzen，1909～1945）在使用超限归纳法的条件下证明了算术公理的无矛盾性。

3。两个等底等高的四面体的体积相等问题。问题的意义是：存在两个等高等底的四面体，它们不可能分解为有限个小四面体，使这两组四面体彼此全等。1900年德恩证明确实存在着这样的两个四面体。

4。两点间以直线为距离最短线问题。此问题提得过于一般。满足此性质的几何学很多，因而需加以某些限制条件。1973年，苏联数学家波格列洛夫（Poglelov）宣布，在对称距离情况下，问题获得解决。

5。一个连续变换群的李氏概念，定义这个群的函数不假定是可微的。这一问题简称连续群的解析性，即是否每一个局部欧氏群都一定是李群？中间经过冯·诺伊曼（1933对紧群情形）、邦德里雅金（Pontrjagin，1908～）（1939对交换群情形）、歇瓦莱（C. Chevalley，1909～1984）（1941对可解群情形）的努力，于1952年，由格利森（A. M. Gleason，1921～）、蒙哥马利（D. Montgomery，1909～）、齐宾（L. Zippin，1905～）共同解决了，得到了完全肯定的结果。

6。物理学的公理化。希尔伯特建议用数学的公理化方法推演出全部物理，首先是概率论和力学。1933年，苏联数学家

柯尔莫哥洛夫（Kolmogoroff，1903～）将概率论公理化。后来在量子力学、量子场论方面取得了很大成功。但是物理学是否能全盘公理化，很多人表示怀疑。

7．某些数的超越性。问题要求证明：若α是代数数，β是无理数的代数数，则α^β一定是超越数或至少是无理数(例如$2^{\sqrt{2}}$和$e^\pi=i^{-2i}$)。1934年，苏联数学家盖尔封特（A. O. Gelfond，1906～1968）证明这是对的。1935年，德国数学家施奈德（Schneider）也独立地解决了这一问题。

8．素数问题。素数是一个古老的研究领域。希尔伯特在此提到黎曼猜想、哥德巴赫猜想以及孪生素数问题。

黎曼猜想至今未能解决。哥德巴赫猜想亦未最终解决，中国的陈景润取得领先地位。目前孪生素数的最佳结果也属于陈景润。

9．在任意数域中证明最一般的互反律。该问题已由德国数学家阿廷（E. Artin，1898～1962）给以基本解决（1927），但至今仍在继续发展类域理论。

10．丢番图方程的可解性。求出一个整数系数方程的整数根，称为丢番图方程可解。希尔伯特问，是否能用一种有限步构成的一般算法判断一个丢番图方程的可解性？1950年前后，美国数学家戴维斯（M. Davies）、普特南（H. Putnam)、罗宾逊（J. B. Robinson，1919～1985）等取得关键性突破。1970年，苏联的马蒂塞维奇（Matijasevic）最终证明：第10问题的答案是否定的。尽管得出了否定的结果，却产生了一系列很有价值的副产品，其中不少和计算机科学有密切联系。

11．任意代数数系数的二次型。德国人哈斯和西格尔(C. L. Siegel，1896～1981）在20年代获重要结果。60年代，法国

的魏依（A. Weil，1906～）取得了新进展。

12。将阿贝尔域上的克隆尼克定理推广到任意的代数有理域上去。这一问题只有一些零星的结果，离彻底解决还相差很远。

13。用两变量函数解一般七次方程的不可能性。七次方程$x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$的根依赖于3个参数a、b、c，$x=x(a, b, c)$，这一函数能否用两变量函数表示出来？这一问题已接近解决。苏联数学家阿诺尔德（V. I. Arnold，1937～）解决了连续函数的情形(1957)。1964年维士斯金(Vituskin)又推广到连续可微函数情形。如要求解析函数，则问题尚未解决。

14。某些完备函数系的有限制的证明。这和代数不变量问题有关。日本数学家永田雅宜给出了漂亮的反例（1959）。

15。舒伯特（H. C. H. Schubert，1848～1911)计数演算的严格基础。一个典型问题是：在三维空间中有四条直线，问有几条直线能和这四条直线都相交？舒伯特给出了一个直观解法。希尔伯特要求将问题一般化，并给以严格基础。现在已有了一些可计算的方法，它和代数几何学有密切联系。但严格的基础迄今仍未确立。

16。代数曲线和代数曲面的拓扑问题。这个问题分为两部分。前半部涉及代数曲线含有闭的分枝曲线的最大数目。后半部分要求讨论$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$的极限环的最大个数和相对位置，其中$X$、$Y$是$x$、$y$的$n$次多项式。苏联的彼德罗夫斯基（Petrovsky）院士曾证$n=2$时极限环的个数不超过3。1979年，中国的史松龄以及王明淑分别举出有四个极限环的反例。

17. 半正定形式的平方和表示。一个实系数n元多项式对一切数组(x_1, …, x_n)都恒大于或等于0，是否都能写成平方和的形式？1927年，阿廷证明这是对的。

18. 用全等多面体构造空间。德国数学家比勃巴赫(C. Bieberbach, 1886～？)(1910)、莱因哈特(Reinhardt)(1928)作出部分解决。

19. 正则变分问题的解是否一定解析。这一问题的研究很少。伯恩斯坦(S. Bernstein, 1878～1956)和彼德罗夫斯基等得出了一些结果。

20. 一般边值问题。这一问题的进展十分迅速，已成为一个很大的数学分支，目前还在继续研究。

21. 具有指定单值群的线性微分方程解的存在性证明。已由希尔伯特本人(1905)和勒尔(H. Röhrl)(1957)、德利涅(P. Déligne, 1944～)(1970)等人所解决。

22. 由自守函数构成的解析函数的单值化。它涉及艰深的黎曼曲面论，1907年克伯(P. Koebe, 1882～1945)获重要突破，其他方面尚未解决。

23. 变分法的进一步发展。这不是一个明确的数学问题，只是谈了对变分法的一般看法。20世纪变分法有了长足发展。

§2 借助直觉进行构思

演绎推理是数学理论可靠性的重要保证，数学的定理、公式只有经过严格的演绎论证才能得到确认，数学计算也不过是以符号形式表现的演绎推理。凭借直观，援引个例，归纳类比，猜测臆断，都不能作为数学的论证。然而，从数学创造的

实际过程来看，数学新概念、新命题、新方法的提出，以及对各种数学问题求解的思考，却决不只是以演绎推理为其唯一有效的工具，更不能简单归结为对某些基本概念和前提作机械的逻辑组合，而是离不开各种非逻辑思维的作用。直觉就是一种常见的非逻辑思维。对于直觉在数学研究中的重要作用，许多数学家都有过亲身体会。彭加勒认为："逻辑可以告诉我们走这条路或那条路保证不遇到任何障碍，但是它不能告诉我们哪一条道路能引导我们到达目的地。为此，必须从远处瞭望目标，教导我们瞭望的本领是直觉。"他还高度概括道："逻辑是证明的工具，直觉是发明的工具。"

希尔伯特的数学直觉能力是十分惊人的，在他的创造性思维活动中，对问题的直觉洞察有时直接把他引向成功的道路。布鲁门萨尔在《希尔伯特全集》最后一卷的传记部分写道："在希尔伯特身上，你能看到一种不可抗拒的深邃洞察力，这正是他的伟大之处。在他的全部工作中包含有这样一些例子，它们来自相距很远的领域，只有希尔伯特才能辨认出它们之间的内在联系，以及跟当前所研究的问题的联系；就是从这一切工作中，最终创造出一个综合物——他的艺术杰作。"这里，我们就几个具体问题来说明希尔伯特是怎样借助他的直觉来完成数学发现的。

一 古典互反律的推广

希尔伯特高度数学直觉力的一个重要表现，是在解决重大难题时，他常常凭借并不是绝对可靠的直觉思维，迅速而准确地洞察到问题的本质。这种深邃的数学洞察力，使希尔伯特在许多情况下，还没真正进行严格的逻辑论证时，就预先敏锐地

看到了问题的最终答案。古典互反律的推广，就是生动的一例。

互反律是数论中的一个重要命题，它的基础是剩余概念。剩余概念最早出现在欧拉、拉格朗日和勒让德的著作中。剩余的记号是由高斯引进的。剩余概念的基本思想很简单：如果$a-p$恰被q整除，或者如果a和p被q除时具有相同的余数，那么就说p是a的模q的剩余，记为

$$a \equiv p \mod q。$$

例如，取$a=25$，$p=4$，$q=3$，由于$25-4$恰被3整除，所以4是25的模3剩余，记为

$$25 \equiv 4 \mod 3。$$

所谓二次剩余，是指如果存在一个整数x，使得x^2-p能够被q整除，那么就说p是q的二次剩余，记为

$$x^2 \equiv p \mod q。$$

如果这样的整数x不存在，那么就说p是q的二次非剩余。例如，对于$p=3$、$q=11$而言，由于存在$x=5$，使得$x^2 \equiv 3 \mod 11$，所以3是11的二次剩余。

在二次剩余概念的基础上，可建立二次互反律：

如果p和q是不同的奇素数，且引用符号

$$(p/q)=\begin{cases} 1，当p是q的二次剩余时， \\ -1，当p是q的二次非剩余时， \end{cases}$$

那么必有

$$(p/q)(q/p)=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}。$$

二次互反律的通俗解释就是，如果等式右边（-1）的指数是偶数，也即p和q是形如$4n+1$的素数时，等式左边的(p/q)和（q/p）就同时为1或者-1，也就是p是q的二次剩余，同时

q也是p的二次剩余，或者哪一个也不是另一个的二次剩余；如果等式右边（-1）的指数是奇数，也即p和q是形如$4n+3$的素数时，等式左边的（p/q）和（q/p）就会一个为1，另一个为-1，也就是其中一个素数是另一个素数的二次剩余，但第二个素数不是第一个素数的二次剩余。

二次互反律在数论中占有着重要的地位，在它的基础上数学家们又研究了三次互反律和高次互反律，并从中引出许多重要发现。二次互反律的由来可溯源于欧拉的工作。在1772年欧拉的著作中，已有这个定律的初步思想，在1783年的著作中，欧拉给出了清楚而完整的叙述，但是没有给出严格的证明。1785年，勒让德又独立地发现了它，他给出两个证明，但都不够严谨。1796年，19岁的高斯首次给出这个定律的严格证明。在1801年出版的历史名著《算术研究》一书中，他给出了另一个证明。以后又相继发表了四个证明，在他未发表的论文中还有两个证明。高斯十分喜爱这个定律，把它视为数论中的一块宝石，还赋予它“黄金定理”的称号。继高斯之后，数学家们又给出了50多个其他的证明。可见二次互反律地位之重要。

希尔伯特对二次互反律及一般互反律的研究，是从他的著名“数论报告”开始的。1893年，已任哥尼斯堡大学教授的希尔伯特到慕尼黑参加德国数学会首届年会，会上，希尔伯特报告了他近期关于将一个域中的数分解成素理想的两个新证明，这是他在数论领域的首批研究成果。他的才能及其成果当即受到与会者的赞赏。经大家公议，大会请希尔伯特和闵可夫斯基在二年内准备一篇关于数论发展现状的报告，目的在于使当时的大多数数学家能够全面了解数论的早期成就及其最新进展。这项工作后来实际上是由希尔伯特一个人完成的。

此时，希尔伯特的兴趣刚从不变量理论转向数论。他被这一数学领域强烈地吸引住了，因为“它有简单的基本定律，它有直接了当的概念，它有纯正的真理。”德国数学会的委托，为他深入到这块奇妙的数学领域提供了良好的机会。为了写好这篇报告，希尔伯特阅读了自高斯时代以来所有发表过的有关数论的著作，修正了某些定理的证明，并对分散的各个定理之间的内在联系进行了探讨。经过两年多全力以赴的工作，1896年初，这篇精美的杰作终于完成。

希尔伯特的“数论报告”，远远超出了数学会成员们的原来要求，它不仅系统地整理了已知的数论成果，把分散的概念、定理融合成一个优美而完整的理论，而且创立了许多新的概念和方法。一位同时代的评论家认为，“数论报告”是一篇令人振奋的艺术佳作。闵可夫斯基则兴奋地预言，这篇报告将使希尔伯特“跻身于数论领域中伟大的经典作者的行列”。

通过撰写“数论报告”，希尔伯特仔细考察了数论研究的前沿领域，并把代数数论确定为自己主攻的方向。数论是研究整数的结构及其关系的分支学科。代数数论的对象是代数整数。代数数，是指满足有理整系数代数方程的复数。当这种方程的最高次项的系数为1时，作为它的根的数称为代数整数。例如，形如$a+b\sqrt{-1}$和$a+b\sqrt{2}$（其中a、b为有理整数）就是代数整数。

随着数概念的扩张，数论讨论的对象也就从有理整数拓广到代数整数。高斯是着手这种拓广的第一位数学家。希尔伯特在“数论报告”中着重阐述的正是数论在代数域上的新进展。他把这篇报告以题目“代数数域理论”发表在1896年的学会年报上。在序言中，他谈到了所关心的题目：“数域理论是

一座具有罕见的优美及和谐的大厦，这个建筑最富有匠心的部分我觉得是阿贝尔数域理论，它通过库麦尔的高次互反律的工作以及克隆尼克对椭圆函数的复数乘法的研究而开辟。更深入观察一下这两位数学家的工作所提供的理论同时给我们揭示出在这领域中还存在有丰富的无价的宝藏，对于懂得这种财富的价值，并且以深切的爱通晓获取它们的艺术的发掘者来说是丰盛的奖励。”

把高斯的古典互反律拓广到代数数域，是19世纪末数论研究的一个重要课题。不少数学家在这个方向上工作过，但都没能达到目的。“数论报告”的撰写，使希尔伯特准备好了解决这一课题必要的知识。在此基础上，他把高斯的二次互反律以一种简单、优美且适合代数数域的形式作了重新表述。

希尔伯特的目标，是把一般的互反律拓广到代数数域。可这却不是一件容易的事情。其中一个最大的障碍，就是古典高次互反律在代数数域中并不成立。看来，要想越过这一障碍，单凭一板一眼的逻辑推理是不行的。因为没有确定的目标，逻辑推理也就无从下手。

面对这种困难，希尔伯特的高度数学直觉开始发挥作用，为他正确选择了逻辑推理的目标。首先，他创造了范数剩余的概念、记号和理论，并引入无限素点。然后，在没有完全可靠的逻辑依据的情况下，他直觉地确信高次互反律可以通过范数剩余来表述，并且对高次互反律在代数数域究竟是什么样子，大胆地作出一种猜测。尔后的工作则表明，他通过猜测考虑出来的基本想法，几乎全部是正确的。对此，有的数学家认为，希尔伯特在数论问题上一直是“通过猜测进行构思的”。

对于直觉在数学研究中的重要作用，希尔伯特曾深有体会

地说："数学知识终究是依赖于某种类型的直观洞察力"。在著名的"数学问题"中，他强调了直觉的重要性，指出"在算术中，也象在几何学中一样，我们通常都不会循着推理的链条去追溯最初的公理。相反地，特别是在开始解决一个问题时，我们往往凭借对算术符号的性质的某种算术直觉，迅速地、不自觉地去应用并不是绝对可靠的公理组合。这种算术直觉在算术中是不可缺少的，就象在几何学中不能没有几何想象一样。"

二 华林问题的解决

直觉思维的另一个重要作用，是当解决问题的逻辑通道阻塞，思路发生中断，研究者陷入困境时，能够帮助研究者打破思维定势，另辟全新的思路，并由此打开通往成功的大门。华林问题的解决，就是希尔伯特在别人遭到失败的地方，借助高度的数学直觉，从他人的失败中洞察到通往成功之路的。

华林问题是英国数学家华林（E. Waring，1734～1798）提出的一个著名猜想。华林在他1770年的《代数沉思录》一书中提出：每一个正整数可表为 4 个平方数之和、9 个立方数之和、19个四次方数之和等等。一般地，设k为给定的正整数，一定存在一个正整数$S(k)$，使得当$S\geqslant S(k)$时，对任意的正整数N，下述方程有非负整数解

$$N=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k,$$

其中$x_i\geqslant 0$（$i=1, 2, \cdots, s$）。

在华林之前一百年，法国科学院的麦齐里阿克（B. Meziriac，1587～1638）在研读丢番图的《算术》一书时，就提出了华林猜想的一个特殊情况：从 4 开始的任何非平方数，可以分解成两个、三个或四个平方的和，但他没有给出证明。这个

特殊的情况是由华林证明的。对于一般的情况，在华林之后的一百多年，一直没有人给出完整的证明。

19世纪末，随着解析方法在数论研究中的有效应用，数学家们对华林问题的解决产生新的希望，他们试图用新的工具来解决老的问题。1908年，希尔伯特的良师益友赫尔维茨试图解决这道百年难题，他几经尝试都遭到了失败，最后只好放手作罢，转向其它的问题。此时，希尔伯特正在积分方程领域大显身手。华林问题的艰难性，尤其是赫尔维茨的失败，使他对这一问题产生浓厚的兴趣。他很想借此机会与赫尔维茨这样的数学高手比试一下高低。于是，他暂时离开了他的主题，集中精力直攻这道使他的朋友遇到挫折的难题。面对这道百年难题，希尔伯特并没有急于确定自己的逻辑思路，而是对以往的各种失败进行了认真的审视。当他把眼光放在赫尔维茨停手的地方时，高度的数学直觉使他产生一个全新的设想，用他自己的话说就是，看到了“黑暗中的一线光明”。于是，他把赫尔维茨停手的地方作为自己的出发点，甚至直接借用了赫尔维茨本人所建立的一类恒等式。

这一次，他象解决果尔丹问题那样，目标仍然是选择所证明问题的存在性，而不是给出问题的实际构造。具体地说就是，对于方程

$$N = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k,$$

他不是象以往试证者那样，试图对每一个给定的正整数k，找出具体的正整数s，而是证明这样的s确实存在。不过，这一次又不完全同于果尔丹问题的解法，他虽然没有具体给出所要求的那个数s，却提供了一种方法，按照这种方法，至少在原则上可以对每个正整数k作出s的一个估计。

希尔伯特的成功，使他的好友赫尔维茨惊讶不已。赫尔维茨怎么也不会想到，恰恰是在他停手的地方，潜在着成功的因素。的确，从数学知识素质上看，希尔伯特并不比赫尔维茨高多少，然而正是高度的直觉洞察力，使希尔伯特在这个问题上比他的良师益友高出一筹。对此，希尔伯特的学生布鲁门萨尔兴奋地说，希尔伯特“用赫尔维茨自己武器库中的武器，在赫尔维茨看不出有成功的可能之处，居然赢得了胜利。”英国著名数学家哈代（G. H. Haydy，1877～1947）后来把希尔伯特的结果部分地推到了定量上。他认为希尔伯特虽然只是定性地解决了华林问题，但“在它本身所涉及的范围之内，这是绝对的成功……是现代数论的里程碑之一。”他还表示，对希尔伯特“能解决掉这个历史问题钦佩之极”。

1909年1月，正值希尔伯特关于这一成果的论文排版之际，他的另一好友闵可夫斯基因患急性阑尾炎不幸去世。这使希尔伯特极为悲痛，他原打算请闵可夫斯基审阅校样，但“亡故者那万无一失的目光已不会在校样上停留”，为了表示对好友的悼念，他在论文上作了这样的题赠：“为了纪念赫尔曼·闵可夫斯基”。

三　直觉简单性的成功

追求简单性是希尔伯特数学思想方法的一个重要特征，也是他高度数学直觉的表现形式之一。希尔伯特一生对简单明确真理的热烈追求，对数学简单性思想的阐发和倡导，以及运用简单性思想解决问题的出色才能，对20世纪数学家的科学思想和研究方法产生了深刻的影响。彭加勒高度评价希尔伯特“将初看起来似乎很复杂的问题简单化的能力，这正是希尔伯特先

生卓越才能的标志之一”。

一般说来，可把简单性分为逻辑简单性和直觉简单性两种不同的类型。逻辑简单性主要来自逻辑思维，直觉简单性则主要来自直觉思维。逻辑简单性和直觉简单性之间又有着交互作用的关系，逻辑简单性是直觉简单性的基础，直觉简单性是逻辑简单性的先导。由直觉简单性引发到逻辑简单性，是简单性思想形成的一般道路。

笛卡儿的坐标几何思想，可算是简单性的典型表现，这个思想概括地说，就是通过坐标系建立起平面上的点和实数对的对应关系。这个简单性思想就是笛卡儿借助直觉的启示确立起来的。据史料记载，笛卡儿的这一思想产生于1616年，这一年，他随军驻扎在多瑙河畔的诺伊堡。这些日子，他几乎整日思考代数和几何结合的方式问题。11月10日晚，他带着整日思索而不得其解的问题入睡了，梦中找到了他白天所要找到的答案。对此，笛卡儿后来回忆道，受梦的启示，“第二天，我开始懂得这惊人发现的基本原理。”这个基本原理就是坐标几何思想。这里所说的梦的启示，实质上就是直觉思维在起着启迪思路的作用。

希尔伯特历来注重数学方法的简单性，在著名的“数学问题”讲演中，针对现代数学庞杂多样，难以驾驭的特点，他曾强调指出：“对于个别的数学工作者来说，只要掌握了这些有力的工具和简单的方法，他就有可能在数学的各个分支中比其它科学更容易地找到前进的道路。”在解决数学问题时，他本人也正是通过建立和掌握一些简单的方法不断前进的。果尔丹问题的解决，就深刻体现了他追求简单性这一思想方法。

在着手解决果尔丹问题之前，希尔伯特曾仔细考察过果尔

丹对二次型这一特殊情况的证明。他认为，果尔丹的证明虽然在逻辑上无懈可击，可是显得太冗长、繁杂，有必要加以改进和简化。他直觉地相信一定能够给出一个新的、简单的证明。不久，他果真找到了一个新的证明。这个证明不到四页，以其简明、优美而使当时的数学家感到满意和愉快。彭加勒对此高度评价道："只要把果尔丹为证明这定理所写的大卷著作与希尔伯特先生给出的、他本人也感到满意的简明证明相比较，就可明白了希尔伯特先生在这方面的贡献，并且没有比这更好的评价方法了。"

在一般性的果尔丹问题上，希尔伯特用存在性证明来代替传统的构造性证明，这本身就是简单性思想的具体表现，而且是一种极为深刻的表现。存在性证明，只要求在逻辑上指出所研究的对象确实存在，而不要求指出这些对象实际上是怎样存在的；构造性证明，则要求把所研究的对象一一地具体构造出来。从思想方法上看，前者显然比后者简单。在果尔丹问题上从传统的构造性证明，一跃而转到存在性证明，没有高度的直觉力也是难以实现的。

简单性思想渗透在希尔伯特的全部工作中，他的"数论报告"、《几何基础》，以及"希尔伯特纲领"，都闪耀着简单性思想的光芒。他的学生爱瓦尔德(P. Ewald)在1924年的一篇书评中写道："希尔伯特精神的光芒——热烈地追求简单明确的真理，把烦琐复杂的东西抛到一边，并以无比清晰的巨匠手法阐明认识要点之间的相互联系——这种基本的精神，以巨大的科学热情熏陶了整整几个世纪的研究者。"

1910年秋，匈亚利科学院授给希尔伯特鲍耶奖①。评奖委

① 鲍耶奖是匈亚利科学院为纪念著名数学家法·鲍耶和亚·鲍耶父子而颁发的数学奖，奖金为1万金马克。1905年第一次颁发给了彭加勒。

员会秘书彭加勒在介绍希尔伯特工作的报告中，特意把“方法的简洁、优美，叙述的清晰明了”，列为他工作的特点之一。

§3 发扬哥廷根科学传统

大凡历史悠久而又著名的大学都表现有自己的科学传统，即在科学思想、研究方法和研究风格等方面，有其鲜明的独到之处，它常常作为一种精神财富，通过教师的言传身教和科学成就被学生们所继承。哥廷根大学的科学传统是数学与自然科学，特别是物理学的有机结合，这一科学传统联系着好几代著名数学家的名字，其中就有希尔伯特的名字在闪闪发光。哥廷根的科学传统在希尔伯特的科学精神中占有重要地位，它构成希尔伯特科学精神的一个组成部分，并且成为他从事科学研究所遵循的一条重要原则。

一　哥廷根的科学传统

哥廷根位于汉诺威以南67英里处，是一座古老而幽静的小城，公元953年最初见诸文字记载。哥廷根大学是在1737年由英皇乔治二世（king George Ⅱ）建立的，所以又名乔治奥古斯塔大学。当时哥廷根归英国皇帝管辖。英皇乔治原为德国王子，是英国王室的近亲，当安妮女皇没有子嗣继承王位时，就被请去兼任英国皇帝了。高斯于1795年10月15日进入哥廷根大学学习，当时这座大学的学术水平虽不高，但藏书却很多。高斯一入大学就显露出不寻常的数学才能，在学习期间就完成了正17边形尺规作图和代数学基本定理等具有历史意义的重大成果。非欧几何的基本思想也是他在大学学习期间形成的。1798

年大学毕业，他回到家乡不伦瑞克，潜心数学研究，完成了最有名的一些论文，其中包括出版历史名著《算术研究》。这部数论杰作实际上高斯在大学学习期间就已经完成。1804年，他被选为英国皇家学会会员。1807年获得哥廷根大学数学和天文学教授职位，并担任了该校天文台的台长。在那里，他度过了一生其余的时光。他从1799年至死前一共发表了将近150篇论文，死后遗留下尚未完全定稿的，为数也很可观。他的论文集共12卷，是在1863年至1933年间，由10名德国权威学者协力编辑完成的。

在历史上，高斯不仅以“数学之王”名垂史册，而且以卓越的天文学家和物理学家著称。作为一名数学家，他一生中同时在纯粹数学和应用数学两个方面都作出了划时代的贡献。在高斯的科学业绩中，深刻体现了抽象与直观、逻辑与自然相统一的力量。他曾亲笔把莎士比亚悲剧“李尔王”中的一段话写在自己肖像的下面作为座右铭：“大自然啊！我愿师习你的工艺，奉你的规律终身不渝。”这无疑是每一个重视纯粹数学与应用数学、数学与自然科学相结合的人，所应遵守的格言。

关于高斯在数论、解析函数论、椭圆函数论、级数论、非欧几何等纯粹数学领域中的工作，在许多书籍中有详细的论述。这里着重介绍他在天文学、大地测量、物理学等方面的工作和贡献，以体会他所创立的哥廷根科学传统。

高斯在天文学中的一个重大贡献是计算谷神星的轨道，这一工作使他在世界学术界大为出名。

1801年1月1日，一位意大利天文学家皮亚齐(G. Piazzi, 1746～1826）在西西里岛的巴勒莫天文台核对星图，偶然发现在金牛座附近有一颗8等星在移动。他连续观测了41天，一直

到2月11日，这颗星扫过8°角之后，就在太阳光中失去了踪影。当时天文学家们无法根据这41次的观察数据来确定这颗新星的轨道，因而也就难以在星罗棋布的天空中再次找到这颗星。不但天文学家对这颗新星感兴趣，当时还在哲学界引起议论。因为黑格尔（G. W. f. Hegel，1770～1831）曾写文章嘲讽天文学家，不必那么热衷去寻找第八颗行星。他指出，他用逻辑方法已经证明太阳系的行星一定恰好是7颗，不会再有其他行星。

许多天文学家试图套用以前的公式来确定这颗新星的轨道，但这些公式需要依据长期观测的结果，甚至连拉普拉斯这样的天体力学大师，都认为无法利用短期观测结果来决定所求的轨道。高斯早先曾研究过月球的运动轨道和自转差等问题，他立刻对这道天文学难题着了迷。经过几星期的努力，他终于创立一种行星轨道计算法，成功地解决了这个问题。天文学家查赫（B .V. Zach，1754～1832）按照高斯的方法造了一个觅星表，果然重新找到了这颗星，人们把它命名为谷神星（Ceres）。高斯不断改进他的方法，并且用来计算其他小行星的轨道。1809年，高斯出版了《天体沿圆锥曲线绕日运动的理论》一书，书中总结了他的上述方法。在这部书中，他首次叙述和使用了最小二乘法原理，这个原理对测量学有着重要意义。

高斯对天象观测也很有兴趣，1801年他自制了六分仪，不辞辛苦地坚持天象观测长达50多年，并且耐心地做冗长而累人的计算。1851年7月28日，已经74岁的高斯还最后一次观测了那天的月蚀。高斯对天文学浓厚而长久的兴趣，可用1803年他给朋友法·鲍耶信中的一句话来表述：“天文学与纯粹数学，

将是我灵魂的指南针所永久指向的两极。”

高斯对大地测绘学的兴趣使他成为一位优秀的测地学家。早在1799年高斯21岁时，普鲁士一名上校为测绘西伐利亚的地图，曾和高斯讨论有关三角测量的理论问题，那时高斯在这方面已有丰富的知识和某些独到的想法。1800年至1815年间，高斯常带着他的六分仪到田野去测量。1816年 6 月，他的学生和朋友、天文学教授舒马赫应丹麦政府之邀，测量全丹麦的地理形状。他请高斯帮忙，负责南部的测绘工作。1820年，高斯得到一大笔资金，用来测量汉诺威。他对这项工作十分热心，到1825年，他进行了长达 5 年的连续测量，每年都写一个工作总结报告。1828年至1844年间，他再次担任汉诺威的测量工作，几乎每个夏天他都亲自到野外参加实地测量。高斯自己曾估计过他在测绘时所画的图大约有一百多万张。许多数学家曾惋惜地说，高斯在野地测量上花费的时间和精力太多了，如果把这些时间和精力用在纯数学研究上，也许会有更大的价值。

1816至1818年间，法国科学院曾悬赏费尔马大定理的证明或反证。高斯的朋友、天文学家欧伯士（W. Olbers，1758～1840）写信给他，请他参加这场竞赛。高斯回答道：“我非常感谢你关于巴黎悬赏的报导，但我得声明，作为单一独立的问题，费尔马定理引不起我多大兴趣。我可以轻而易举地提供一连串这类的命题，绝对没有人能够证明或加以应用。”高斯的朋友、天文学家贝塞尔（Bessel，1784～1846）在1823年给他的信中曾明确提出，野外测量工作辛苦、繁杂，对高斯来说只是虚度光阴。高斯回信说：“当然了，世上所有的测绘、度量，无论如何绝对比不上一条把科学推向前一步的真理有份量。但是你不可以什么都用绝对的标准来评断，你也应该考虑相对的

价值。”从这里可以看出，高斯是一位重视数学实际应用的人。

高斯重视数学的实际应用，但他并不把自己的思想停留在经验阶段，而是尽可能地从经验出发提出各种新的思想和理论。从测地工作出发，他开创了曲面内蕴性质研究。所谓曲面内蕴性质，是指那些只在曲面上作研究即可以获得的性质，而与曲面所在的三维空间无关。高斯对曲面内蕴性质的研究有着深远的意义，它直接导致了黎曼几何的创立，而后者又是相对论理论的有力工具。对此，爱因斯坦（A. E. Einstein，1879～1955）曾评价道：“高斯对近代物理理论的发展，尤其是对于相对论理论的数学基础所作的贡献，其重要性是超越一切，无与伦比的，……假使他没有创造曲面几何，那么黎曼的研究就会失去基础，我实在很难想象其他任何人会发现这理论。”

高斯对物理学的贡献也是多方面的。他和实验物理学家韦伯(W. Weber,1804～1891）有着深厚的友谊。1831年，经高斯推荐，韦伯被聘为哥廷根大学物理教授。韦伯的实验才能和高斯的理论思维达到了很好的融合，两人首创了电磁铁电报机。这是世界上第一台实用电报机，电报线长约一公里，架设在高斯的天文观测台与韦伯的物理实验室之间。高斯和韦伯在1833年到1845年间，一直使用这个电报机互通短讯，直到后来有一次闪电击坏了电报线为止。高斯曾向他的朋友舒马赫表示，如果政府肯给他足够资助的话，他可以把电报机改进到完美的地步。

高斯对磁有独到的研究，其研究成果大部分收录在三本书中：1832年的《以绝对单位所测定的地磁强度》，1838年的《地磁的一般理论》，1840年的《地磁图》（与韦伯合著）。

为了精确测定地磁，1833年高斯建立了磁观测所，它是以铜代替铁做建材的，这可避免铁对磁场的影响。很快其他各地也纷纷仿照高斯的作法建立了磁观测所。高斯还绘制了世界上第一张地球磁场图。为了纪念高斯在磁学方面的贡献，高斯的名字被采用为磁场强度的单位。

高斯在光学、流体力学、最小作用原理等方面也有研究成果。反映这些成果的主要论著有：1817年的论文"关于消色差双物镜，尤其是把色散更完全地消除"，1829年的论文"关于力学的一个新的普遍原理"，1843年出版的书《光折射之研究》（1840年完成），1829年出版的书《在平衡下流体之形式的一个理论》，等等。

高斯以其一生的科学活动开创了哥廷根的科学传统：纯粹数学与应用数学、数学与自然科学的紧密结合。这一科学传统在长达一百多年的时间被后代所继承，成为培养一代代数学家成长的一股无形力量。高斯的直接后继者是狄里克莱，他曾在布勒斯劳大学和柏林大学任教，1855年高斯逝世后转到哥廷根大学接替高斯的教授职位，直至1859年去世。狄里克莱非常钦佩他的老师高斯，他是第一个把高斯《算术研究》这本书的内容消化进去，又能清楚地讲授出来的人。据说，他十分喜欢这本书，即使在旅行中也随身带着，在哥廷根传为佳话。他的贡献涉及到数学的各个方面，其中以数论、分析学，特别是位势论最为突出。冠以他的名字的概念和术语有几十个，如狄里克莱空间、狄里克莱函数、狄里克莱原理、狄里克莱积分、狄里克莱泛函、狄里克莱特征、狄里克莱抽样法、狄里克莱问题、狄里克莱不连续因子，等等。他在力学、物理学方面也有重要研究成果。狄里克莱只在哥廷根大学任职5年，因此他的工作

对哥廷根大学没能产生象高斯那样明显的影响。

黎曼作为高斯和狄里克莱的学生，很好地继承和发扬了哥廷根科学传统。他是1859年狄里克莱逝世后接替狄里克莱的教授职位的。和高斯一样，黎曼对数学和物理学有着双重的兴趣，他的许多数学发现都是凭借物理直观的启示作出的，他写了一些关于热、光、气体理论、磁、流体力学以及声学方面的论文，并试图把引力和光统一起来。他与H·韦伯合著的《数学物理的偏微分方程讲义》，在20世纪初成为物理专业的重要参考书。他曾说过，他是一位数学家，但他的主要兴趣是关于物理定律的工作。克莱因推测，黎曼关于复函数的重要思想很可能是来自他对平面电流流动的研究。黎曼生前怎么也不会想到，他建立的几何学会在40年后成为爱因斯坦创立相对论的数学工具。

把哥廷根科学传统推向新阶段的是克莱因。1886年，37岁的克莱因从莱比锡大学转到哥廷根大学任教授，他十分重视由高斯开创的哥廷根科学传统，并采取种种措施，使哥廷根的数学研究一直保持在纯粹数学与应用数学、数学与物理学相结合的轨道上。他到哥廷根大学之前就强调纯粹数学与应用数学、数学与物理学结合的必要性，反对数学中出现的盲目追求抽象化的倾向。他在《陀螺的数学理论》中提出："纯粹科学和物理学中有纯粹科学最重要应用的那些部门，应该再一次把它们密切结合起来，在拉格朗日和高斯的工作中证明了这种结合是非常有成果的，它们是数学科学最需要的礼品。"他认为物理学中的许多新思想和理论上的纠纷，都需要有数学的帮助；同样，物理学能够为数学提供直观的素材并给数学以强有力的刺激。他认为："黎曼在研究函数论的时候，是从富立叶热传

导理论中引导出函数边值问题的方法”，“黎曼理论的基本思想是由直观的物理的思想中产生的”。其实，克莱因本人的几何学、函数论的基本思想，也是来自直观的物理的思想。

克莱因对应用数学的关心以及对数学与物理学相结合的重视，自转到哥廷根大学工作之后更加增强了。为了贯彻他的思想，克莱因采取了一系列必要的措施。

第一项措施是建构哥廷根大学的数学星座。克莱因十分清楚，要巩固和加强哥廷根大学的数学地位，必须有一个理想的学术核心。为此，他极力寻找机会，把他满意的人调到哥廷根大学。1895年，H·韦伯调离哥廷根大学去斯特拉斯堡大学任教，趁此机会，克莱因把希尔伯特从哥尼斯堡调来接任韦伯的数学教授职位。1902年，在克莱因的争取下，哥廷根大学又设立一个新的教授职位，这一次他把闵可夫斯基从苏黎世大学聘来担任这个职位。1904年，克莱因又争取到一个应用数学教授职位。在当时的德国，专门为应用数学设立教授职位这还是第一次。克莱因把汉诺威大学的龙格调来担任这个职位。和希尔伯特、闵可夫斯基一样，龙格早就是克莱因心目中的候选人，他既是第一流的数学家，又是一位杰出的物理学家，在谱线测量方面享有盛名。这四名数学精英的汇集，标志着哥廷根的数学进入鼎盛时期，同时也使哥廷根的科学传统倍增光彩。

第二项措施是改革数学教育制度和教育计划，加强应用数学的份量和地位。克莱因是教育改革的积极倡导者，1904年，他提出了数学教学改革的要点：

1. 教材的选择、排列，应适应于学生心理的自然发展。

2. 融合数学的各分支，密切与其他各学科的关系。

3. 不过分强调形式的训练，实用方面也应置为重点，以便

充分发展学生对自然界和人类社会诸现象进行数学观察的能力。

4. 为达到此目的，应将养成函数思想和空间观摩能力作为数学教学的基础。

克莱因在数学教育改革中的先进思想和实践活动，使他在1908年罗马召开的第四届国际数学家会议上，当选为国际数学教育委员会的中央委员。在1912年剑桥召开的第五届国际数学家会议上，当选为国际数学教育委员会的会议主席。

第三项措施是加强数学家与自然科学家的合作和学术思想交流。他创立了“哥廷根协会”，举办了各种形式的讲习班，使教师们能及时接触到数学和自然科学的尖端成果。在哥廷根大学，人们可以看到数学家与其他科学家之间的关系是极为密切的。如物理学家黎克（E. Rieke）、福格特(W. Voigt)，应用电气学研究所所长西蒙（H. T. Simon)，应用力学研究所所长普朗特尔（R. L. Prandtl, 1875～1953），天文学教授许瓦尔茨席尔德（K. Schwarzschild, 1873～1916），地球物理学研究所所长魏恰特等人，都与数学家有着密切的学术交往。正是为了巩固和发扬高斯开创的哥廷根科学传统，在克莱因的倡议下，哥廷根树起了高斯和韦伯的纪念碑，这两个人生前在数学和物理学方面有过出色的合作，共同发明了一种电磁铁电报机。这座纪念碑象征着数学的抽象与物理问题相结合的科学传统。

二 进入物理学领域

在克莱因精心建构的哥廷根数学星座中，希尔伯特这颗星最为明亮耀眼，随着时间的推移，他逐渐成为这个星座实际上

的核心。在他的身上，鲜明表现着哥廷根的科学传统。

希尔伯特在早期科学生涯中已经表现出对物理学的兴趣和偏爱。他在做讲师的第一年，就开设了流体力学课。他的好友闵可夫斯基在青年时代曾致力于物理学研究，更增加了希尔伯特对物理学进展的关心。两位朋友经常在一起讨论现代物理学的新成果，特别是相对论和量子力学方面的新思想。闵可夫斯基在物理学方面有显著的研究成果，他第一次用数学方法深刻揭示了爱因斯坦狭义相对论的实质，他的四维几何成为现代物理学的重要工具。

希尔伯特虽然不是一名出色的物理学家，也没有象闵可夫斯基那样在物理学领域作出令人瞩目的贡献，但他曾在长达10年的时间思考和研究过物理学问题，并试图用数学来改造物理学。他对物理问题的热心关注以及为改造物理学而作出的种种尝试，深刻体现了哥廷根的数学物理传统。

希尔伯特是从积分方程研究进入物理学领域的。积分方程是积分号内含有未知函数的方程，它是微积分应用于物理现象的产物，它始于丹尼尔．伯努利的工作，它的产生一开始就与力学、声学、光学、电磁学中的连续体的振动问题有关，本身就是一门介于数学与物理学边缘的学科。1822年，富立叶的《热的解析理论》的问世，是积分方程理论由“潜科学”过渡到“显科学”的重要标志。挪威青年数学家阿贝尔在1823年和1826年的论文中，为论证在重力场中落体运动轨道形式与落下时间的关系，深入研究了一类重要积分方程的解法。19世纪末，意大利数学家伏尔泰拉（V. Volterra，1860～1940）和瑞典数学家弗雷德霍姆着手建立起积分方程的一般理论，使这一理论成为19世纪末、20世纪初数学发展的一个重要方向。

积分方程理论的兴起，以及希尔伯特本人对数学与物理学的双重兴趣，使他在完成几何基础研究工作和成功地解决了狄里克莱原理问题之后，直接转向了积分方程理论。从1904年到1910年，他在《哥廷根自然科学皇家学会报告》上一连发表了六篇论文，1912年出版了《线性积分方程一般理论的原理》一书，在这部书中，他把积分方程理论广泛应用到物理问题。经过希尔伯特的工作，积分方程成为理论物理学不可缺少的重要数学工具。

1912年～1922年间，是希尔伯特集中精力研究物理学问题的时期。他的计划是用数学来改造物理学的直观和经验的研究方式。

他的第一个目标是改造气体分子运动论和初等辐射理论。气体分子运动论虽然早就明确地把概率统计作为其数学工具，但在相当长的时期，整个气体运动理论并不是以统一的方式发展起来的，许多不同的问题，常常用不同的、毫无联系的方法来处理。作为一名数学家，希尔伯特感到，气体分子运动理论并不那么严密，许多互不相同的物理原则究竟是否相容？它们之间有什么样的逻辑联系？物理学家通常都没有给以重视，更没有作出准确的回答。

对于物理学表述上的混乱状况，希尔伯特早就注意到了。在1900年巴黎国际数学家代表大会上，他把物理学的公理化作为23个著名问题的第六个，指出“几何基础的研究提示了这样的问题：用同样的方法借助公理来研究那些在其中数学起重要作用的物理科学”。现在，他打算借助于公理方法和积分方程理论，首先在气体分子运动论研究上实现自己的计划。不久，他就成功地证得气体分子运动论中的麦克斯韦——玻尔兹曼基

本方程是二阶积分方程，从这一基本方程出发，他给气体分子运动论建立了一个简单而统一的体系。

接着，希尔伯特对初等辐射理论的改造也取得了成功。在两三年内，他就发表了一系列论文，以线性积分方程为工具，推导了初等辐射理论的基本方程，为这门理论初步奠定了公理化基础。

希尔伯特对气体分子运动论和初等辐射理论研究的意义，并不在于物理成就本身，而是在于他的工作为用数学方法实现物理学的统一提供了一个模式。运用这个模式，希尔伯特又相继探讨了物质分子论和电子理论。物理学的公理化问题，虽然至今尚未彻底解决，但希尔伯特在这方面的尝试，却为现代理论物理学的数学化指出了新的方向。沿着这一方向，冯·诺伊曼将量子力学作了公理化处理，从而为这一微观物理现象研究提供了严格的数学基础。

希尔伯特在物理学领域的第二个目标，是从数学的角度研究相对论和量子力学。1914年，爱因斯坦正在加紧研究广义相对论，他的工作引起了希尔伯特的极大兴趣。希尔伯特试图达到与爱因斯坦同样的目标。当爱因斯坦于同年11月向柏林科学院提交两篇“广义相对论”论文时，希尔伯特也几乎达到了自己的目的。次年11月，希尔伯特向哥廷根皇家协会提交了他关于“物理学基础”的一份注记，其中阐述了他在这方面的研究成果。但希尔伯特在任何场合都坦率地承认，广义相对论的伟大思想应当归功于爱因斯坦。他认为，爱因斯坦理论的精美之处在于它的伟大的几何抽象，在于所体现出的高度的数学精神。正是出于这种认识，当1915年颁发第三次鲍耶数学奖时，希尔伯特推荐了物理学家爱因斯坦。

希尔伯特对量子力学发展的贡献也是举足轻重的。他关于积分方程的工作和关于无穷多个变量的理论，已成为量子力学的非常合适的数学工具。对此，海森堡（W. K. Heisenberg, 1901～1976）后来写道，“凡是二十年代在哥廷根学习过的人，对于这种影响都有充分体会。希尔伯特和他的同事创造了一种特有的数学环境，所有年青的数学家都是按希尔伯特积分方程和线性代数理论所体现的思想方式训练出来的，因此，对于这些领域中的每一项理论发表来说，哥廷根始终是比其它任何地方更合适的场所。现已表明，量子力学的数学方法原来是希尔伯特积分方程理论的直接应用，这确是一件特别幸运的事情……。”

希尔伯特对量子力学发展的影响远远超过了他本人的预料。他创立的谱理论在量子力学的成功应用，是他不曾想象到的。谱理论来源于希尔伯特对无穷多个变量理论的研究，是近代抽象分析发展的产物。使希尔伯特本人感到惊奇的是，他的抽象的二次型的谱竟可以解释为原子的谱。他深有感触地说道：“我是从纯粹数学的兴趣出发而发展了关于无穷多个变量的理论，甚至还把它称之为‘谱分析’，可未曾想到后来在物理中一个现实的谱上找到了应用。”量子力学的发展表明，这一理论的数学方法实际上就是谱分析的方法。

三　与物理学家结成联盟

哥廷根大学数学和物理学相结合的科学传统，在希尔伯特身上除了表现为他本身重视并直接研究物理学问题外，还表现为他主动与物理学家建立联盟，积极开展学术思想交流。

希尔伯特一生中结交了许多著名物理学家。在这些物理学

家中，索末菲（A. J. W. Sommerfeld，1868～1951）对他的影响和帮助有着决定性的作用。索末菲也是哥尼斯堡生人，哥尼斯堡大学毕业后留校当助教，1897年成为数学教授。1900年任亚琛大学应用数学教授。1906年被聘为慕尼黑大学理论物理学教授，在当时是德国最多产的一批年青物理学家的中心人物。他在原子结构、原子光谱和电磁波衍射等方面有重要贡献，出版了有名的《原子结构与光谱线》一书。他被选为英国皇家学会会员，还是美国科学院以及柏林、哥廷根、慕尼黑、维也纳、罗马等科学院的院士。索末菲重视和提倡科学的合作精神，他经常和学生们一起去效游，一路上尽是在谈物理学，在他的研究所里充满着友谊和合作精神。早在1897年任哥尼斯堡大学数学教授时，他就开始同克莱因合作共同研究陀螺的运动，经过长达13年的努力，完成关于陀螺仪的四卷巨著。

索末菲是希尔伯特最亲密的物理学朋友，也是希尔伯特经常求教的物理学顾问。希尔伯特早就计划邀请象索末菲这样的卓越物理学家来哥廷根交流学术思想，但由于经费问题长期没能得以实现。乌斯克奖金为他实现这计划创造了条件。乌斯克（P. Wolfskehl）是达姆施塔特的数学教授，他临终前将十万马克交给哥廷根科学会，作为授予第一个正确证明费尔马大定理的奖金。在奖金未领取之前，其利息可由哥廷根科学会的一个专门委员会自行处理。希尔伯特当上了这个委员会的主席，他决定将这笔钱的利息用于支付访学费用。

1910年，希尔伯特用乌斯克奖金利息请彭加勒和洛伦兹（H. A. Lorentz，1853～1928）来哥廷根讲学，彭加勒讲授的是积分方程和相对论，洛伦兹讲授的是相对论和辐射理论。1912年，索末菲被邀请到哥廷根讲学，他全面而详细介绍了物理学

的最新进展，其中包括冯·劳厄（M. T. F. Von Laue，1879～1960）一年前提出的关于晶格引起x射线衍射的理论，这一理论使劳厄荣获了1914年的诺贝尔物理学奖。

索末菲最早的助手德拜（P. Debye）也是希尔伯特的物理学挚友，他们俩人是在“乌斯克会议”上相识的。乌斯克会议是指用乌斯克奖金利息召开的为期一周的物理学家聚会，1913年在哥廷根举办，由希尔伯特任会议主席。参加会议的大都是青年物理学家，后来几乎都成了科学界的知名人物。在这次物理群英聚集的盛会上，希尔伯特对德拜的印象很深，为了有机会使德拜来哥廷根工作，1914年夏，希尔伯特聘请德拜为哥廷根大学客座教授，并用乌斯克奖金利息邀请他到哥廷根讲学。

在德拜讲学期间，希尔伯特和他组织了一个关于物质结构的讨论班，人们称为希尔伯特—德拜讨论班。当时，物质微观结构的大门刚刚被打开，物理学家对物质结构的认识分歧很大。继1911年卢瑟福（E. Rutherford，1871～1937）根据α粒子散射实验提出原子的“行星式有核模型”，1913年玻尔（N. H. D. Bohr，1885～1962）提出原子的“量子化轨道模型”。对这位丹麦青年物理学家的创新思想，当时学术界的反映是不同的。卢瑟福起初表示怀疑，但很快就接受了。汤姆逊（J. J. Thomson，1856～1940）则坚决反对这一新理论，认为是俗不可耐的肤浅皮毛。劳厄也指责玻尔是在“胡说八道”。

希尔伯特—德拜的讨论班是相当活跃的，参加讨论班的人大多数是国外来的学生，他们感到，物理学研究的活生生的脉搏仿佛就在他们的指尖上跳动。从1922年以后，由于希尔伯特转向了数学基础问题研究，这个讨论班改由玻恩（M. Born，

1882～1970）和他亲密的朋友弗朗克(J·Franck，1884～1966）主持。玻恩曾在布雷斯劳大学、海德尔堡大学和苏黎世大学学习，后在朋友的劝说下转入哥廷根大学。朋友们告诉他说：哥廷根是“德国数学的麦加”。1907年，玻恩获得哥廷根大学哲学博士学位，二年后被提升为哥廷根大学副教授，1921年升任理论物理教授。玻恩的才华，使他的周围云集了一批青年物理学家，他的目标是在哥廷根建立一个可以与索末菲在慕尼黑的研究所相媲美的物理研究所。玻恩出色地继承了希尔伯特和德拜的事业，使涌向哥廷根的大批物理学优秀人才在这里倍长才干。参加过这个理论物理讨论班的许多青年人后来都成为了杰出的物理学家，其中著名的有海森堡、泡利（W. Pauli，1900～1958）、康普顿（A. H. Compton，1892～1962）、狄拉克(P. A. M. Dirac，1902～1984)、奥本海默(R. Oppenheimer，1904～1967)、约当·波林（L. Pauling)、豪特曼斯(F. Houtermans)和勃拉克脱（P. M. S. Blackett)等。

为了便于了解和掌握物理学的进展，希尔伯特在1912～1928年间还添设了物理助手的职位。第一个担任这个角色的是爱瓦尔德。爱瓦尔德是索末菲在慕尼黑的学生，1906年曾到哥廷根听希尔伯特的微积分课，当时被雇来当辅导老师。他的任务是把他在希尔伯特课堂上记的笔记整理成清楚的抄本，放在阅览室供学生们查阅。爱瓦尔德后来成了一名卓越的物理学家，每当回忆这段学习生活，他总是告诉别人，他所需要的分析学知识几乎全是在希尔伯特的微积分课上学到的。当1912年春爱瓦尔德回到哥廷根担任希尔伯特的物理助手时，人们把他当作“希尔伯特的物理教师”来欢迎，实际上这也是希尔伯特添设这个新助手职位的本意。在和这个年青物理学家讨论物理学问

题时，希尔伯特总是先让爱瓦尔德阅读有关课题的各种文献，然后再向他详细汇报。通过这种形式的学术思想交流，爱瓦尔德帮助希尔伯特了解物理学的新进展，他本人则通过精心推敲各种文献而深入到物理学的前沿领域。

爱瓦尔德离开哥廷根以后，索末菲又派兰德(A. Lande)来作希尔伯特的物理助手。希尔伯特这次想出了一个从物理助手获取物理学知识更有效的方法，他预先挑选出一大叠最近发表的物理学论文的抽印本，让兰德去阅读，然后再让兰德选出其中有重大意义的文章向他报告。论文涉及的范围常常是十分广泛，固体物理、光谱学、流体力学、热学和电学，凡是他感兴趣的论文，他都想了解其中的最新思想。每天上午，兰德都要到希尔伯特家，向这位"数学家中的物理学家"介绍自己认为有重要意义的论文。

在和物理助手讨论问题时，希尔伯特喜欢用一种更系统、更清楚、更简单的方式复述对方介绍的知识，这是一种数学家的思维方式，与通常物理学家的思维方式有所不同。有时，他们刚讨论完一个题目，希尔伯特就安排一次讲演，内容就是刚讨论过的课题。希尔伯特虽然不是一位高明的物理学家，但他对物理问题通俗而简明的讲解，常常使在场的每一个人感到吃惊。控制论创立者维纳(N. Wiener, 1894～1964)在1914年曾到哥廷根大学就学，希尔伯特留给他的印象是，"能够把巨大的抽象能力与实际的物理意义密切结合起来的伟大数学家，是自己学习的楷模。"冯·诺伊曼从1921年到1925年这四年里，是在布达佩斯大学注册学习的，但他不时到哥廷根去听希尔伯特的讲演。他对希尔伯特的物理学思想十分感兴趣，两个人常常在一起长时间地热烈交谈。正是受希尔伯特量子力学的

数学基础思想的影响，冯·诺伊曼创立了分析量子力学基础的著名理论。

1922年，希尔伯特转向数学基础问题之后，仍然以极大的热情保持着与物理学家的密切交往。在1922年到1928年间，他先后聘请了诺德海姆（L. Notdheim）和魏格纳（E, Wigner, 1902～）担任他的物理学助手，这两个人也是他的好友索末菲推荐的。1928年魏格纳离开后，由于数学基础研究的需要，物理学助手的位置由一名叫史密特（A. Schmidt）的学数学的青年顶替了。在这种情况下，希尔伯特阅读有关物理学文献时，遇到弄不明白的地方，就给德拜或玻恩打电话，请他们来作解释。

第五章　高尚的科学伯乐精神

科学人才是科学知识的主要生产者，是决定科学发展的一个根本性的因素。就某种意义来说，发现和培养一名优秀的科学人才，并不比创造和确立一项科学成果显得意义小。因此，在评价一名科学家，尤其是学术名家的贡献时，应当把能否善于发现和培养人才作为其中的一个重要内容。希尔伯特在科学成果和培养科学人才两个方面，为当代数学的发展都作出了巨大贡献。他是富于独创精神的学者，也是独具慧眼的科学伯乐。他的科学伯乐精神，以及培养和造就科学人才的思想方法，将和他的科学成果、科学思想方法一起，铭刻在现代科学的史册上。

§1　为人才开路

人才成长的道路是艰难曲折的。在科学历史上，由于传统观念的影响、习惯势力的阻挠、学阀权威的压制、民族偏见的束缚，以及反动阶级的扼杀等原因，常常会出现科学人才被埋没的蒙难现象。科学伯乐精神的一个重要表现，就是敢于同各种阻碍人才成长的现象作斗争，让受压抑、被埋没的人才充分发挥其才能。在这方面，希尔伯特有着许多值得赞颂的感人事迹。

一　为女数学家艾米·诺德排忧解难

艾米·诺德是现代数学史上最富创造性的女数学家之一，

有“抽象代数之母”的盛誉。抽象代数中有诺德环、诺德整环、诺德局部环、诺德半局部环、诺德模、诺德概型等术语，足见她在这一领域中的贡献。对她的去世，爱因斯坦曾作出这样的评价：“据现代权威数学家们判断，诺德女士是自妇女开始受到高等教育以来最重要的富于创造性的数学天才。在最有天赋的数学家们为之忙碌了多少世纪的代数领域里，她发现了一套方法，当前一代年轻数学家们的成长已证明了它的巨大意义，依据这套方法，纯粹数学成了一首逻辑概念的诗篇。”艾米·诺德之所以能在科学领域作出如此重大的贡献，享有如此巨大的国际声誉，是与希尔伯特荐贤举能的科学伯乐精神分不开的。

艾米·诺德生于德国爱尔朗根的一个犹太人家庭。父亲麦克思·诺德是爱尔朗根南德大学数学教授，在代数几何方面造诣很深，和“不变量之王”果尔丹有深交。小艾米在父亲影响下，少年时代就对数学产生浓厚兴趣。1900年她中学毕业，打算到父亲的大学学习数学。可是，在妇女受歧视的时代，德国的大学不准女生注册入学，只能有极少数的女生获得旁听生的资格。这年冬天，艾米以优异的考试成绩取得旁听生资格。在上千名学生中，只有两名旁听的女生。后来，德国大学改变了制度，她才有机会得到正式的学籍。

艾米早期的数学工作深受果尔丹的影响，她的博士论文“三元双二次型的不变量完备系”，就是在果尔丹的亲自指导下完成的。1910年果尔丹退休后，科伦大学的费歇尔(E. Fischer，1875～1959)接任了他的职位。受费歇尔的影响，艾米开始对抽象代数理论发生兴趣。正是这种兴趣的发展，使她后来成为“抽象代数之母”。

1914年，第一次世界大战爆发后，艾米·诺德的家庭发生重大变化，父亲退休，母亲病故，弟弟被征从军。她决定前往哥廷根谋求职业。这位年轻的女博士一到达哥廷根，希尔伯特就看出她是女子中的奇才。此时，希尔伯特正热衷于广义相对论的研究，艾米·诺德在抽象代数理论方面的精深造诣，正是这一研究工作所需要的。于是，希尔伯特决定把这位女青年留在哥廷根大学工作。

在当时的德国社会，女性仍然处于受歧视的地位，她们之中尽管有极少数佼佼者有机会享受高等教育，但要想在大学里任教则是难以实现的，因为社会上普遍存在一种“女人的头脑是低能”的偏见。哥廷根大学虽然曾在1874年破例授予俄国女青年柯瓦列夫斯卡娅（S. Kowalewsky，1850～1891)荣誉博士的学位，从而成为德国第一所准许给女性以博士学位的高等学府，但还没有女性学者上讲台授课的先例。

为使艾米·诺德进入哥廷根大学任教，希尔伯特四处奔走，多方联系，在教授会议上，他历数这位女博士的数学成果，要求批准她为哥廷根大学的第一名女讲师。他的提议当即引起激烈的争论。一些哲学、语言学和历史学教授反对得最为厉害，他们唯一的理由是，如果让一名女人当讲师，那她以后就会成为教授，成为大学评议会的成员，而这怎么能行呢？有的甚至不加掩饰地指出，决不能让从战场上回到大学的大兵拜倒在女人的脚下读书。针对这种男尊女卑、歧视女性的偏见，希尔伯特以尖锐的口吻批驳道：“我没见过，候选人的性别竟成为反对她当一名大学教师的理由。我们毕竟是一所大学而不是一个洗澡堂。”尽管希尔伯特据理力争，保守派仍然占了上风，艾米·诺德没能取得讲师的资格。为了保证她的生活和工作，希

尔伯特只好自己想办法，他以自己的名义开设课程，但实际上由艾米·诺德来主讲。不到两年，她就发表了两篇重要论文，一篇是把黎曼几何学和广义相对论中常用的微分不变量化为代数不变量，另一篇是把不变量和守恒定律联系在一起提出“诺德定理”。

第一次世界大战结束后，妇女的社会地位稍有好转。经希尔伯特再三提议，教授会终于作出让步，同意授予艾米·诺德以讲师职称，但没有工资，只能靠从听课学生那里收费来维持最低的生活条件。1922年，在希尔伯特及一些有正义感的教授的长期努力下，艾米·诺德被批准为一名“非正式的特别教授。”这是一个比普通教授地位低，并且仍然是没有固定薪金的头衔。此时，艾米·诺德已成为哥廷根数学学派中的一名学术带头人，并且开辟出了一个新的数学领域——抽象代数。她所主持的代数讨论班是当时哥廷根大学最富创造性，成果最多的研究团体，在她周围云集了一大批才华横溢的青年数学家。荷兰的范·德·瓦尔登（B. L. Van der Waerden），苏联的亚历山大洛夫（P. S. Alexandroff,1896～1982），日本的正田建次郎、末纲恕一、秋月康夫、浅野启三、中山正、东屋五郎、永田雅宜，中国的曾炯之，都曾在她的门下学习过，得益过她的教诲。

艾米·诺德在抽象代数理论上的卓越成就，受到国内和国际的广泛注目。1932年，她应邀参加了苏黎世国际数学家大会，并在大会上作了发言。同年，她荣获了阿克曼—特布纳（Ackermann—Teubner）奖。看到这样一位杰出的女数学家在自己的祖国始终得不到应有的地位和待遇，希尔伯特心里十分难过。在一次教授会议上，他忍不住愤怒地嚷道：“在过去这几

年，我们到底选进了几个真才实学的人呢？”接着痛心地说：等于零，等于零啊。”

1933年，希特勒纳粹政权掀起狂热的反犹运动，出身犹太家庭的艾米·诺德也难逃厄运，被列为清洗的对象。为保护这位女数学家，富有正义感的希尔伯特不顾个人安危，带头联名上书给当时的教育部长，要求继续留用她。可是，一切努力全无济于事。艾米·诺德只好忍痛离开自己的祖国流居美国，到毛尔学院和普林斯顿高级研究所任教。1935年春，因癌病在那里去世。毛尔学院为她举行了追悼会，外尔在追悼会上致悼词，追述了她一生的成就。爱因斯坦在《纽约时报》为她写了悼念文章。

艾米·诺德的去世和其他许多犹太数学家的不幸遭遇，使希尔伯特在精神上受到沉重打击。在一次宴会上，当新任教育部长卢斯特问他：“现在哥廷根的数学怎么样？它已经完全摆脱了犹太人的影响？”希尔伯特不无好气地顶撞道：“哥廷根的数学？确实，这儿什么都没有了。”

二　为青年教师纳尔逊申张正义

在希尔伯特的档案袋里，有一份标有“纳尔逊事件”的材料，它详尽记载了当时希尔伯特为受压抑的青年教师纳尔逊(L·Nelson)争取副教授资格而作出的种种努力。

纳尔逊原为柏林大学哲学系学生，取得博士学位后慕名来到哥廷根，希望在这里获取讲课资格。他博学多才，不仅通晓哲学、逻辑学和伦理学，而且对数学基础问题很有兴趣。他性格开朗，好与人争论，在许多问题上有自己的独到见解。希尔伯特十分喜欢这位青年人，常常约他在一起散步，共同探讨哲

学、数学和逻辑学相交汇的知识领域。

按当时的规定，要想取得讲师资格，必须向教授会提交和通过晋升讲师的论文。可是，由于纳尔逊对一些问题的尖锐评论引起了哲学教授哈塞尔等人的不悦，因而他的晋级论文遭到教授会大多数成员的拒绝。纳尔逊受到无端非难，感到心烦意恼，但又毫无办法。有一天，正当他在自己的房间里苦闷地独思时，希尔伯特突然亲自登门来访。他热情地邀请纳尔逊到他家吃晚饭，并且为他精心安排了如何去对付这些持有偏见的教授们。经过几番周折，在希尔伯特的支持和帮助下，纳尔逊的晋级论文终于得以通过。几年之后，在晋升副教授问题上，纳尔逊再次遭到哈塞尔等人的阻挠。这一次，希尔伯特亲自在教授会上同反对者相争，在他的努力下，纳尔逊终又获得成功。在希尔伯特的影响下，纳尔逊很快成为一名颇有名望的科学哲学家，他是希尔伯特形式公理化思想的积极支持者，撰写了三卷本《伦理学基础讲义》，他所主编的一份哲学杂志，在当时很有影响。

三　为优秀生柯朗开拓成才之路

希尔伯特的科学伯乐精神，还表现在他十分注意从高年级学生中寻找那些出类拔萃者，并创造各种条件使他们尽快走上成才之路。现代著名数学家、美国纽约州立大学柯朗教授就是在希尔伯特的慧眼辨识和精心栽培下，由一名潜才成为名家的。

柯朗生于一个不很富裕的犹太小商人家庭，从14岁起就有独立生活能力，一边读中学，一边给一所女子学校的学生辅导，用以维持生活和学习费用。柯朗在中学时就酷爱数学，中学毕业后，他没有进预科学校，经朋友的介绍来到哥廷根。1907年

10月，他以优异的考试成绩进入哥廷根大学，成为希尔伯特的学生。他经常参加哥廷根数学俱乐部的活动，并在会上热烈地与别人讨论问题，由此引起希尔伯特的注意。

一年之后，希尔伯特要从学生中挑选一名助手，帮他准备讲义，记录和整理讲稿。柯朗的才华和勤奋，使他成为最合适的候选人。从此以后，柯朗成为希尔伯特的助手，他一边学习，一边为希尔伯特的教学作些辅助性工作。1909年，在希尔伯特的建议下，柯朗把狄里克莱原理的应用问题作为博士论文的选题。1910年2月，他以最优秀的学业成绩获得博士学位。

柯朗毕业后，希尔伯特打算把他留在学校当讲师，可是讲师的限额已满，除非有人离去才可补缺，为了使柯朗留校工作，希尔伯特和克莱因想了一个限额外用人的办法，设立讲师资格获得者一席，和艾米·诺德一样，做讲师工作，但没有固定的薪金，薪金从听课学生的学费中支付。按当时的规定，留校生还要交一篇论文，作一次学术演说。在希尔伯特的指导下，柯朗成功地撰写了“关于狄里克莱原理的方法”一文，作了题为“数学中的存在性证明”的演说。经过一番曲折，柯朗终于成为哥廷根大学的一名教师。

1914年第一次世界大战爆发，26岁的柯朗应征入伍。1918年12月，柯朗结束军队生活，返回哥廷根，重新开始数学创造活动。不到一年，就接连发表了好几篇关于微分方程特征值的重要论文，受到数学界的广泛重视。可是，由于职位名额的限制，他在哥廷根仍然没有机会取得教授职位，这使希尔伯特很着急。1920年，蒙斯特大学的基林（W. K. J. Killing，1847～1923）教授退休，为了不使柯朗失去晋级的机会，希尔伯特打算先让他到那里任职，以后有机会再重新回到哥廷根。经希

尔伯特和克莱因的推荐，柯朗做了基林的继任教授。不到一学期，回哥廷根任教授职位的机会就来了，在希尔伯特和克莱因的力争下，哥廷根大学获准增加三名数学物理教授。趁此机会，希尔伯特和克莱因再次把柯朗召回哥廷根。这次聘请柯朗为哥廷根大学教授有着特殊的背景，他是作为克莱因的接班人考虑的。

1924年，柯朗出版了一部很有影响的著作——《数学物理方法》第一卷。这部书本来是他独自撰写的，但他却把希尔伯特的名字与自己的名字一起并列在封面上。他在序言中说明：他之所以这样做，是因为书中大量的内容取材于希尔伯特的论文和讲演，体现了希尔伯特的科学精神。柯朗没有辜负两位数学大师的期望，他不仅象他的前辈一样继承了哥廷根优良的数学和物理学相结合的科学传统，而且出色地担负起哥廷根数学建设的行政事务。1925年，克莱因去世。在哥廷根科学会举行的追悼会上，柯朗回忆了这位一身兼任学者、教师、组织家和行政管理家传奇式人物的一生，赞颂了他在发扬哥廷根科学传统，改革数学教育以及振兴整个德国数学中的巨大作用。柯朗继承克莱因的遗愿，筹建哥廷根数学研究所。研究所于1929年12月2日正式成立，柯朗担任所长。他推进了克莱因倡导的数学教育改革，开设了数学“实践课”，即我们现在通常所说的习题课。克莱因创建的那个数学俱乐部，在柯朗的重视下，越办越有生气。柯朗主持数学研究所工作的时期，正是哥廷根数学的鼎盛时期。

1933年，随着纳粹头子希特勒上台，哥廷根良好的学术环境遭到严重破坏。尽管柯朗在第一次世界大战中腹部受过伤，中过毒气，为德国作战立过功，但疯狂的排犹活动，使他同样

遭到了象艾米·诺德等其他犹太科学家遭到的厄运。希尔伯特试图让柯朗去法院控告现行政府的非法活动，然而在纳粹政权统治时期，法律已不再有任何效力。后来，以希尔伯特、海森堡、普朗克（M. K. Planck, 1858～1947）、薛定谔（E. Schrödinger, 1887～1961）、范·德·瓦尔登、弗里德里希（K. Friedrichs,1901～1983）等著名学者为首的28位科学家，为挽留柯朗等人联名向政府写了请愿书，但这一切努力都没能阻止住纳粹分子对柯朗的迫害。柯朗在自己的祖国实在难以生存了，1934年，他不得不携家眷来到了美国。

柯朗后半生的学术生涯与纽约州立大学紧密联系着。他在纽约州立大学创立了美国第一个应用数学研究所，这就是著名的柯朗应用数学研究所。在战争期间，柯朗及其所领导的研究小组为反法西斯战争做出了卓越贡献，他们共完成了194项军事项目，其中包括水下声学和爆炸理论。柯朗把哥廷根的科学传统和哥廷根数学研究所的经验带到了美国，对美国应用数学的发展起到了重要作用。战后，纽约州立大学成为美国的数学中心，吸引着世界各国的数学家，“柯朗应用数学研究所”被誉为美国“应用数学分析的首都”。

柯朗对自己的祖国怀有深厚的感情。战争结束不久，他就到哥廷根作了访学，并对哥廷根大学数学研究所经常给以帮助。后来几乎每年回德国一次，也时常邀请德国数学家来美。1962年希尔伯特诞生一百周年，他回哥廷根参加了纪念活动，发表了演讲。在演讲中，他回顾和阐述了希尔伯特的工作及其对数学发展的重要影响，强调了领悟希尔伯特精神，发扬哥廷根科学传统的现实意义。他以希尔伯特的工作为有利武器批判了那种片面追求数学的抽象方向，忽视数学的实践性的倾向。他说：

"希尔伯特以他感人的榜样向我们证明：这种危险是容易防止的；在纯粹和应用数学之间不存在鸿沟，数学和科学总体之间，能够建立起果实丰满的结合体。因此，我确信，希尔伯特那有感染力的乐观主义，即使到今天也在数学中保持着它的生命力。"

四　为旁听生格罗美争取博士学位

希尔伯特不拘一格选拔人才的伯乐精神，还表现在他敢于打破博士学位授予工作中不合理的规章制度。1912年，一名叫格罗美（J. Grommer）的犹太青年作为旁听生参加了希尔伯特的数学讨论班。格罗美从小喜欢数学，由于家境贫寒没有进过预科学校，是在一所犹太法典学校里受教育的，这是一所培养教士和法学人才的学校。从这所学校毕业以后，格罗美得到作一名教士的机会。按照他所在地区的风俗习惯，要想成为一名教士，必须跟原来老教士的女儿结婚才行。然而，这位老教士的女儿却嫌格罗美因患有肢端肥大症而造成的手脚畸形，不肯和他结合。格罗美的教士职务当不成了，一气之下放弃了当教士的念头，转而发愤攻读他所喜爱的数学。

有一天，格罗美通过希尔伯特的助手陶普列茨（O. Toeplitz，1881～1940）递上一篇申请博士学位的论文，请希尔伯特审阅指导。希尔伯特见到论文，一眼便看出作者有着不凡的数学才能。凭他多年的经验，大多数博士论文只有"半个好思想"，好一点的论文也只是有"一个好思想"，就算可以了，但这篇论文却有"两个好思想"。可是，按当时的规定，非本校毕业的学生必须具有预科学校的毕业文凭才有资格申请博士学位。格罗美由于没进过预科学校，没有预科学校的毕业文凭，自然不符合申请博士学位的条件。

为了不使这位犹太旁听生的数学才华遭到埋没，希尔伯特决心为他尽一切努力争取到博士学位。他对自己的助手说："如果我能为这个没有预科学校文凭的年轻的立陶宛犹太人争取到博士学位，那可真是做了件有意义的事情！"在学位资格评审会上，格罗美的学位申请果真遭到教授们的否定，其唯一理由是论文的作者没有预科学校的毕业文凭。对此，希尔伯特与他们展开了激烈的辩论。他认为一个人的学历并不重要，重要的是他是否真正有才能。他直截了当地说："如果没有预科学校毕业文凭的学生都能写出象格罗美这样的论文，那就必须做一条规定，禁止参加预科学校的毕业考试。"经过希尔伯特的有力争辩，教授们不得不改变态度，破例同意授予格罗美博士学位。

五　为有才华的学生发表葬礼演说

关于希尔伯特爱才惜才的科学伯乐精神，还有这么一段故事广为流传。这段故事联系到数学史上著名的黎曼猜想，为了说明问题，我们先从黎曼猜想的提出谈起。

黎曼猜想是黎曼在1859年接任他的老师狄里克莱的教授职位时提出的。按当时的规定，晋升教授必须提交一篇说明自己才能的论文，黎曼提交给教授会的论文是"论小于给定数的素数个数"。这篇不到10页的论文，充满了新颖而独到的思想，成为近代数学史上的一颗闪亮明珠。

黎曼这篇论文的出发点是欧拉在一百年前发现的一个恒等式。欧拉在1744年提出：若s是大于1的实数，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

这里符号$\prod\limits_{p}$表示$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}$之积，$p$包括所有的素数。由于这个等式建立了函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$的性态与质数性质之间的一种奇妙联系，因而引起数学家们的极大兴趣。欧拉本人曾从多方面探讨了这种联系。黎曼在论文中把s拓广为复函数，从此以后，这函数就叫做黎曼ξ函数。在1859年的论文中，黎曼证明了这个函数的一些重要性质，并猜测了6个其它的性质，但未给予证明。在他死后的百年间，世界上许多优秀的数学家都极力想证明他的这些猜想。第一个获得成功是法国数学家阿达玛(J. S. Hadamard，1865～1963)，1892年他证明了第一、三、四个猜想。1894年，冯·蒙戈尔特（H. C. F. Von Mangoldt）证明了第二、六个猜想。于是，只剩下第五个猜想。这个猜想的提法是：黎曼ξ函数在带形区域$0\leqslant\sigma\leqslant 1$中的一切零点都位于$\sigma=\dfrac{1}{2}$这条直线上。这就是著名的至今仍未证实的黎曼猜想。

这个猜想的提法看起来极为简单，许多非数学专业工作者都能理解它的内容，可是谁也没能给出它的严格证明。希尔伯特把黎曼猜想列为著名的23个问题的第八个，可见它的难度和重要性。有人曾问到希尔伯特：最重要的数学问题是什么？他不加思索地答道：“ξ函数的零点问题，不仅在数学上最重要，而且是绝对的重要！”

有一天，希尔伯特的一名学生交来一篇证明黎曼猜想的论文。希尔伯特仔细审阅了这篇文章，文中虽然有一个他自己也无力纠正的错误，但作者的深刻论证却紧紧地吸引住他了。希尔伯特对这名学生的工作抱有很大的希望，并鼓励他继续探究

下去。

可是，天有不测之风云，第二年这名学生因患急病不幸去世。这使希尔伯特万分痛惜，他亲自找到死者的双亲，要求允许发表一个葬礼演说。在葬礼的那一天，阴雨迷茫，在死者亲友的一片哀哭声中，希尔伯特致了悼词。他在悼词中指出，这名年轻的天才在他的才华尚未充分发挥之前就离开了人世，这是多么令人痛惜的啊！希尔伯特接着高度评价了这名学生的论文，认为他的论文虽然没有成功地证得黎曼猜想，但沿着他的路子走下去，是有可能解决这个著名问题的。最后，他以强烈的语调再次激励人们要充满信心，排除艰难险阻，去征服黎曼猜想。希尔伯特的这一举动和激奋人心的演讲，使送葬的死者亲友和同学，无不为之感动。

六　为繁荣数学事业不怀任何偏见

希尔伯特的科学伯乐精神来自于他彻底献身于科学的高尚品质。无论在科学研究和人才培养上，他都不允许掺杂进民族的种族的性别的及个人的任何偏见。这种正直、诚实的科学品质，构成了希尔伯特科学精神的重要组成部分。

希尔伯特推荐外尔接任他的职位，就表现了他的这种高尚品质。外尔生于汉堡附近的埃尔姆斯霍恩，18岁时仰慕希尔伯特大名来到哥廷根大学学习，受希尔伯特的影响很深，1908年获得哲学博士学位。1910～1913年任该校无薪教授。1913年到1930年，任教于苏黎世的瑞士联邦技术大学。外尔的研究领域十分广泛，在数学、物理学和科学哲学方面都有卓越的贡献。他对数学基础问题很感兴趣，仔细研究过布劳威的著作。1918年，他写了篇论述连续统逻辑基础的文章。当希尔伯特批判布

劳威的直觉主义观点时，外尔却认为布劳威改造古典数学的计划是大有前途的。他的朋友乔治·波利亚（G·polya，1887～1985）向外尔指出，布劳威的计划注定是行不通的，因为这会使数学穿戴不齐，就象只穿衬衫的袖子。外尔立刻跟波利亚就两个具体命题的前途打了一个赌，一个命题是：每个非空有界实数都有一个上确界；另一个命题是：每个无限实数集都有一个可数子集。外尔认为这两个命题是非常含糊的，"对于他们的真假，就象对于黑格尔哲学主要思想的真假一样，人们很少能作什么判断。"外尔相信，按照布劳威的计划，这两个命题不出20年就会从数学中一笔勾销。波利亚不同意外尔的看法。两人决定到1938年来判定胜负。如果到了1938年，两个人对于它们的看法不能统一，就以瑞士联邦研究院、苏黎世大学、柏林大学和哥廷根大学里大多数教授的意见作为裁判。到时候，输者必须在德国数学会的《年鉴》上承认自己输了。可见，外尔对布劳威直觉主义计划信任的程度。1920年，外尔作了几次支持布劳威计划的演说，公开表示"赞同布劳威的观点"。他利用自己的文学天才和富有感染力的讲演，使布劳威的思想得到更为广泛的传播。

希尔伯特看到自己的学生迷上了布劳威的直觉主义观点，而且正不断地靠拢，成为布劳威的忠实追随者，十分恼火。他在抨击布劳威的同时，也抨击了外尔解决集合论悖论问题的错误观点，指出外尔和布劳威一样，"是在步克隆尼克的后尘"，"是通过错误的方法来寻求这个问题的解答"，是"要对这门科学大砍大杀"。

然而，学术观点上的分歧并没有改变师生之间的亲密关系，希尔伯特始终把外尔看作是自己唯一的"数学儿子"，是功绩卓

著的第一流数学家。在外尔的身上，希尔伯特看到了哥根廷的数学传统，他对外尔一直充满着希望。外尔确实没有辜负他的老师的希望，他的数学研究涉及到许多领域，特别是在积分方程的解析理论、黎曼曲面理论、联络空间微分几何学、群表示论等方面有重要的贡献。在物理学方面，他的《空间、时间、物质》是相对论的一部经典著作，五年内出版了五次，流传极广。他对量子理论的形式化也作出了重大贡献，著有《群论与量子力学》一书。在科学哲学方面，他的《数学和自然科学的哲学问题》是一部有较大权威的著作。由于这一切，使得他三十几岁就成为同辈数学家中最声名显赫的一位了。

正象当初克莱因为了加强哥廷根的科学传统，把希尔伯特从哥尼斯堡召来一样，希尔伯特希望外尔能早日从苏黎世回到哥廷根。1922年，就在希尔伯特发表汉堡演说猛烈抨击布劳威和外尔直觉主义思想的那一年，外尔收到了希尔伯特的聘请信。外尔对克莱因和希尔伯特十分敬爱，他愿意为哥廷根的科学传统贡献一生。由于当时德国正处于第一次世界大战结束后的动荡时期，外尔没有离开平静的苏黎世。1930年，希尔伯特即将退休，在教授会上讨论继承人时，希尔伯特再次提名外尔，尽管此时外尔已经45岁了，他的最富创造性的时期即将结束。外尔的到来，为哥廷根数学学派增添了新的光辉。外尔在他的整个科学生涯中，始终履行着一条朴素的箴言："忠于希尔伯特的精神"。在希特勒纳粹党上台，德国的犹太科学家遭到空前的迫害，哥廷根数学学派面临严重打击的日子里，身为数学研究所领导职位的外尔和希尔伯特一起到处奔走，他写信，去找政府官员交涉，希望通过各种努力能保住艾米·诺德和柯朗等优秀数学家，能维持住由高斯开创的，由狄里克莱、黎曼、克

莱因和希尔伯特发扬的哥廷根科学传统。当所有一切努力都无效后，在爱因斯坦的说服下，外尔本人也不得不离开德国去美国普林斯顿高等研究所工作，他的夫人有犹太血统。

希尔伯特不怀偏见的科学精神，还表现在他对“交战国科学家”的友好态度上。1917年第一次世界大战期间，法国著名数学家达布去世。消息传到哥廷根，出自对达布卓越数学功绩的敬佩，希尔伯特写了一篇悼文发表在哥廷根的《通讯》上。这篇文章登出后，遭到一些人的反对，他们要求希尔伯特收回这篇悼念“敌国数学家”的文章,并扬言要销毁所有的复印本。希尔伯特坚决拒绝了这种无理要求，他要求校方必须对此事件负责，否则就要辞职。他的科学正义感，迫使校方向他赔礼道歉，悼念达布的文章得以继续刊行。

1928年，意大利数学家筹备在波隆那召开一次国际会议，这是第一次世界大战结束以来规模最大的一次数学家代表大会。在此之前，受交战国对立情绪的影响，德国数学家很长时间没有收到任何国际会议的邀请。这一次，意大利数学家决心开个名符其实的国际性会议，恢复了对各德国学校和数学组织的邀请。可是，许多民族主义情绪严重的德国数学家却不想前往参加，有的甚至百般阻挠，柏林大学的数学教授比勃巴赫就是其中的代表人物。① 为了在学术界煽动德国的民族主义情绪，比勃巴赫发表了一封公开信，鼓动学术界行动起来抵制这次在波隆那举行的会议。希尔伯特回信表明了自己的立场：“我们相信，比勃巴赫先生的做法将给德国科学带来不幸，并使我们受到来自友好方面的正当批评……，意大利同行们不惜花费时

---

① 他曾提出著名的单叶函数系数猜想。

间和精力，为伟大的理想主义而奔走……，在这样的情况下，对这次会议采取亲善的态度，似乎是应有的正直行为和最起码的礼貌”。

就是这个比勃巴赫教授，在后来纳粹的排犹运动中，再次扮演了极不光彩的角色。他到处发表演说，鼓吹“德意志数学”，指责“抽象的犹太思想家”把人引向歧途，甚至把“希尔伯特和克莱因这样杰出人物”引入“智力游戏”。比勃巴赫的行为助长了纳粹在学术领域对犹太科学家的迫害。

1928年8月，希尔伯特不顾比勃巴赫等德国民族主义者的反对，毅然率领一个由67名数学家组成的代表团赴波隆那出席会议。在开幕式上，德国代表团受到热烈欢迎。希尔伯特感到万分高兴，他在演说中强调了不同国家、民族开展学术交往的必要性，他说：“应当看到，作为数学家，我们是站立在精确科学研究的高山之颠。除了义不容辞地担当起这个崇高的职责，我们别无其他选择。任何形式的限制，尤其是民族的限制，都是与数学的本质格格不入的。在科学研究中人为地制造民族的或种族的差异，是对科学极端无知的表现，其理由是不值一驳的”。希尔伯特的演说赢得全场热烈的掌声。

§2　造就新一代数学家

希尔伯特从1886年任哥尼斯堡大学讲师，到1930年于哥廷根大学教授职位退休，从事教育活动长达40多年。他一生中坚持把培养和造就新一代的数学家作为自己最光荣的职责。他通过授课、指导学位论文和课外交谈等多种形式，热心地向学生传授数学知识和数学研究的技艺。他的教育思想和方法，同样

体现着他重视、珍惜人才的科学伯乐精神。

一 把学生引向当代数学发展的进程

希尔伯特从事数学教育工作的重要目标，是把学生尽快地引向当代数学发展的进程，使他们早日完成由“潜才”到“显才”的演进。他所处时代的教育，还没有充分重视对学生能力的培养，教师们大都沿袭传统的教学规范，喜欢按步就班地向学生讲授知识，不大注意把当代科学的新思想、新成果引进课堂。这种作法，在客观上势必会延长学生不出成果的时间，缩短他们最富创造性的年华。希尔伯特却不然，作为领头的数学家，他不仅一直站在当代数学进程的前列，带领他同时代的数学家开拓一个又一个新的领域，而且在教学中始终注意向学生介绍当代数学的新思想、新成果，以便把他们尽快地带到当代数学发展的前沿。

希尔伯特十分重视教学内容的现代化，总是尽可能地把当代数学的新思想、新成果及时引进课堂。例如，积分方程论在本世纪初正值方兴未艾之时，他在讲授这门课时，把许多最新的研究成果，包括积分方程在分析学、几何学和力学上的最新应用，都介绍给了学生。日本著名数学家高木贞治(1875～1960)在1900年曾就读于哥廷根大学，深得希尔伯特的教益。希尔伯特当时要高木贞治研究“克隆尼克青春之梦”问题，高木贞治于1920年终于彻底解决这一著名难题。他在回忆哥廷根的学习情景时指出，希尔伯特的教学是有启发性的，在积分方程论课教学中，他曾远见卓识地向学生描述过那些正在出现的、尚不成熟的新概念和新方法，有些新概念和新方法甚至还没有被数学界所周知，他的学生通过课堂教学就已经掌握了。

为了使教学内容充满时代的气息，希尔伯特还把教学和科研紧密结合起来。他常常是研究什么课题就开设什么课程，不变量理论、数论、变分学、积分方程和几何基础等，都曾是他授课的题目。例如，1899年夏，他成功地改进了著名的狄里克莱原理，并由此出发作出变分学一连串的重大成果，就在当年冬季学期，他就开设了变分学这门课程。

即使是那些在低年级开设的基础课，希尔伯特同样也会通过“由旧引新”、“以新带旧”，使教学内容充满生机。例如，在给一年级学生开设微积分和数论等课程时，他时常在讲完某个概念后，由这个概念出发进而引伸出现代分析学的某些概念，而这些概念按照常规的教学进程，学生通常只能在若干年后才会有机会接触到。这种“超时域”的授课方法，虽然有时会给学生的听课带来困难，但却受到学生的普遍欢迎。学生们都愿意听他的微积分和数论课，课堂上学生总是挤得满满的，甚至有的学生只能倚在窗台旁听课。

对于希尔伯特开设的基础课，外尔是最有感受的。1903年，外尔还是一个18岁的乡村小伙子，对数学还十分无知。在他的中学校长的推荐下，外尔来到哥廷根。一开始，他慕名大胆选听了希尔伯特的数论课。尽管大部分内容学起来很吃力，但希尔伯特对数学的乐观、热情，对数学价值的无可动摇的信念，以及对于简明问题追求简明答案的思维方式，却坚定了他致力于数学研究的信心。他下定决心，一定要竭尽全力阅读和研究希尔伯特所写的著作。带着这种愿望，这一年暑假，他几乎放弃了休息，一门心思地研读希尔伯特的“数论报告”。外尔后来总是把这个暑假说成是他一生中最幸福的日子，因为这本书为他打开了通往数学世界的大门。他以其亲身的经历，深有感

触地向别人说："没听到希尔伯特这样的人讲授基础课的年轻人，真是太可惜了。"

二 把着眼点放在培养解决问题能力上

希尔伯特数学教学的另一个显著特征是，重视培养学生的科学创造能力，把教学的着眼点始终放在培养学生提出和解决问题的能力上。他坚决反对数学课只是填鸭式地向学生灌输各种知识，提倡运用启发式教学方法。其具体作法主要是：

第一，从最简单的例子出发，由特殊逐渐上升到一般。希尔伯特认为，由特殊上升到一般的思想方法，是克服困难的最重要的杠杆之一。他本人的许多重要发现都曾得益于这种思想方法。为了有效培养学生由特殊上升到一般能力，他在教学中明确提出，要从最简单的例子出发，由特殊的问题开始，逐步展开整个的理论。例如，在微分方程论教学中，他习惯于从最简单、最基本的两个方程$y''=0$和$y''+y=0$出发引伸出整个的理论。他还预先告诉学生："你们能从这两个方程来学习整个的理论，甚至包括初值问题和边值问题在意义上的差异。"这种由特殊上升到一般的教学方法，具有很大的启发性和吸引力，外尔回忆到："观看希尔伯特如何一步一步从特殊到一般创造出适当的概念和方法，使本质的结论油然而生，那是很大的乐趣。"

第二，向学生展现解决问题的真实思想进程。希尔伯特在课堂上并不总是按照预先设计的备课方案，对问题的解决步骤一板一眼地加以阐述，而是常常按照自己的思路，针对具体的问题现想现推，有时还会临时闪现出某种新的思想火花，表现出若有发现的冲动。这种教学方法会使学生们觉得数学是"活"

的，比起克莱因等人那种精心准备、百科全书式的“完美”讲课，学生们更喜欢希尔伯特的课。因为它在某种程度上再现了数学创造的实际过程，使学生能够直接观察到这位名家的创造性思维活动是怎样进行的。

学生们在课堂练习时，有时会陷入困境而无所措足，在这种情况下，希尔伯特并不急于给出问题的答案，而是首先启发他们：“为什么老方法失败了呢？这是怎么回事？我们能做些什么？我们怎样才能摆脱这个困难呢？”然后，他再向学生指出问题的困难之所在，让学生去寻求解决困难的方法。

第三，把自己尚未完成的研究课题介绍给学生，鼓励他们去解决。希尔伯特研究数学有一个习惯，就是每当闯进一个领域并认为最重要目标已经达到时，就会很快离开这个领域，转而闯进另外一个领域，而把余下的问题留给他的后继者去完成。在教学过程中，结合教学内容，他常常把其中的某些问题连同自己的想法介绍给学生，鼓励和启发他们去完成。这些问题，有的后来以他和他的学生合作的方式得到了解决，有的则被他的学生独立地完成了。例如，在1905年的积分方程论教学中，他在讲授他前一年刚提出的有关特征函数和特征值理论时，向学生指出，这个理论在一个关键之处“艰涩难证”，有必要加以改进。他的学生艾哈德·史密斯受希尔伯特思想的启发，在学位论文中成功地简化了这个证明，并把特征函数的概念作了推广。

希尔伯特不仅讲课方法新颖独到，就是备课方式也与众不同。他周围的教师备课时大都注重在理论的细节上悉心推敲，生怕课堂上出现漏洞。可是，希尔伯特却在数学理论的基本思想和重要方法上最下功夫。在一次与闵可夫斯基、玻恩共同备

课时，他竟然拒绝讨论某些细节，因为在他看来，这些细节完全可以由学生课后自己去补充和完成。他明确提出他教学的原则是：“为学生解决具体问题搭一座桥”。

三　在交往中向学生传授数学研究的技艺

希尔伯特的数学教育活动，决不只是局限在课堂范围，他经常通过散步和学术讨论会等教学形式，开阔学生的思想，增长他们的才干。哥廷根大学的数学俱乐部，就是他跟青年人交流学术思想的一个重要场所。

数学俱乐部是哥廷根大学开展数学活动最活跃的一个场所，在这里每周定期举行聚会。这是一种自发性的学术活动，没有明确的负责人，也没有任何带有拘束性的组织形式。参加者有教授、讲师和学生，但更多的是那些才华刚刚显露的青年人。他们在这里自由地发表演说，报告自己的新成果以及各种虽不成熟但有价值的潜科学思想。

希尔伯特是数学俱乐部活动的积极参加者，几乎是有会必到。在这里，他可以从中发现象柯朗那样有才华的青年人，有的就选择为情投意合的学术伙伴，而青年人每次和他在一起相聚，又总能在他身上得到有益的教诲，特别是那些来自国外的青年访学者，在这里可以目睹鼎鼎有名的希尔伯特是怎样行动和思考问题的。

希尔伯特对讲演艺术的讲究和对讲演者的严格要求，在当时是众所周知的。他喜欢向讲演者提出各种问题，并且常常是打破砂锅问到底。他要求数学俱乐部的讲演必须体现数学所固有的特色，高度简明清晰。他常常用这样的一句话来提醒讲演者。“只要蛋糕里的葡萄干”。他会毫不客气地打断那些平淡

无味或纠缠于烦琐计算的讲演，有时还会相当苛刻地说：“我们不是在上中学课啊”。有一次，他对一位演讲人的报告很不满意，没等报告完他就尖刻地说：“我亲爱的同事，恕我冒昧，你恐怕还不清楚什么是微分方程吧。”讲演者立时被弄得狼狈不堪，只好转身离开会场，躲到隔壁的阅览室去了。别人批评希尔伯特太不留情面了，他却坚持说：“可是他确实不清楚什么是微分方程啊。你们瞧，他不是到阅览室去查书了吗！”

尽管有希尔伯特对讲演者的尖刻评论，世界各国的优秀数学家还是愿意到哥廷根数学俱乐部去发表演说，他们都把哥廷根之行当作是人生中最有意义的一件事情。如果能直接得到希尔伯特的评论，哪怕是带有批评性的，也会被看作是一种巨大的荣幸。被尊称为“控制论之父”的维纳，在1924年重访哥廷根时，曾在数学俱乐部报告过自己关于调和分析方面的成果。多年以后，维纳在自传中用了十几页篇幅来叙述他在哥廷根的这次讲演。维纳是在一个下午做的报告，报告结束后，维纳和大家照例一起徒步去附近的一个餐厅共进晚餐。在晚餐席上，希尔伯特对最近几年在数学俱乐部的讲演作了一番评论：“现在的演讲比过去差远了。在我年青的时候，人们都很讲究演讲艺术。演讲人对于自己究竟要讲些什么以及怎样才能讲好，考虑是很多的。现在的年青人却不这么干，在哥廷根尤其如此。我想世界上最差的演讲恐怕就是在哥廷根做的。今年情况更坏，我压根儿就没听到一次好讲演。最近尤其糟糕。不过，今天下午有个例外……。”这时，维纳以为希尔伯特要夸奖他了。可是，希尔伯特接下去说的却是，“今天下午的这个讲演嘛，是最近所有这些讲演中最糟糕的一次！”弄得维纳很不好受。尽管如此，维纳仍然对希尔伯特钦佩至极，把他看做是自己终生

学习的楷模。

希尔伯特与青年人保持课外接触的另一个重要形式，是与他们一起散步，在散步中自由地畅谈数学问题。这一点与克莱因有所不同，克莱因虽然也喜欢与青年人接触，但学生大都对他抱有敬畏之情，把他看作是“云端的神”，而与希尔伯特却容易结成伙伴式的友谊，他们习惯称他为“我们的王”。希尔伯特喜欢把讨论班中最聪明、最有才华的学生称为“神童”，常常约他们一道去林荫道或城郊的山坡作长时间散步。每当这个时候，希尔伯特总是显得格外平易近人，从不表露出名家所惯有的那种优越感，他的每句话都会使他们对自己的未来充满希望。量子力学创始人尼尔斯·玻尔的兄弟哈拉德·玻尔（H. Bohr）就参加过这种数学散步。当时22岁的哈拉德·玻尔正在努力奋斗，攀登通往数学王国的阶梯。他是在兰道的建议下从丹麦来到哥廷根的。他一到哥廷根，就感到这里有一种四海之内皆兄弟的真诚精神统御着年轻的数学家。和克莱因相比较，希尔伯特留给他的印象是：“菲力克斯·克莱因……是位庄严的老人。所有的人，不论年轻还是年老，都对他的堂堂威仪表示极大的尊敬——你甚至可以说是敬畏……，而大卫·希尔伯特的光辉天才照耀着哥廷根的全部生活，它仿佛把我们紧紧地结合在一起……，对希尔伯特说的每一句话，不管是关于我们这门科学的或是随便别的什么事，我们都觉得新鲜稀奇，富于内容。”

希尔伯特在向青年人传授数学知识的同时，常常告诫他们，只有勤奋努力，才有希望登上数学的峰巅。他最喜欢的一句名言是“天才就是勤奋”，而他本人就是最勤奋的。他反对青年人着急于结婚成家，因为这会在最富创造性的时期妨碍他们的

科学工作。希尔伯特曾器重一名叫威尔海姆·阿克曼（W. Achermann）的青年逻辑学家，并为他在哥廷根大学争取到讲课机会，两个人相处很好，于1928年合著出版了《理论逻辑纲要》一书。后来阿克曼过早地结了婚，不久又有了孩子。希尔伯特很生气，不愿再为阿克曼的前途承担任何义务。结果，这位青年逻辑学家失去了大学的工作，只好到一所中学去教书。对此，希尔伯特曾明确地表白："因为这个人既然这么糊涂，这么着急结婚、生孩子，那我就完全不必再来为这样一个糊涂蛋承担任何义务啦！"

希尔伯特自1895年应克莱因的邀请到哥廷根大学任教授，到1930年以68岁的高龄退休，为发展哥廷根大学的数学教育事业勤勤恳恳地工作了整整35年。就是在退休之后，他仍然继续定期到哥廷根大学讲课，坚持去数学俱乐部参加各种集会。作为一名学者和教师，他在当时获得了最高的声誉。20世纪初，几乎全世界优秀的数学专业的学生都受到这样的忠告："打起你的背包，到哥廷根去！"德国是当时世界数学活动的中心，哥廷根则是"德国数学的麦加"，希尔伯特又是数学麦加这块圣地上创造奇迹的英雄。从下面两件事足以看到他所享有的巨大声誉。

1902年，柏林大学的富克斯去世，他的教授职位将聘请希尔伯特去担任。这个消息在哥廷根大学传播开来，引起了青年讲师和学生们的极大不安。他们一方面觉得象希尔伯特这样领头的数学家，应当到首都去工作，但另一方面又确实不愿意让他离开哥廷根，因为许多人之所以到哥廷根来，仅仅是因为这里有个希尔伯特。他们推选出三名代表到希尔伯特家，请求他不要离开哥廷根。当他们得知希尔伯特作出不走的决定后，人

人欢欣鼓舞。为此，他们组织了一次烟酒晚会，表达对希尔伯特的敬意。克莱因参加了集会并讲了话，他在讲话中全面而精彩地概括了希尔伯特对哥廷根数学和教育方面的成就及其对当代数学发展的影响。在当时，举办烟酒晚会，是对少数负有盛誉的教授表示敬意的最好方式之一。

哥廷根大学的师生把希尔伯特的生日看作是德国数学家们的高贵节日。希尔伯特70寿辰时，为了表示对这位伟大学者的热烈崇敬，哥廷根大学师生为他举行了一整天盛大的欢庆。希尔伯特往日的学生从德国各地云集在这里，许多人还是从国外专程赶来的。祝寿宴会是在新建的数学研究所大楼举行的。生日之夜，举着火把的学生队伍，冒雪来到研究所大楼门前，他们热烈地向希尔伯特欢呼致意。这是学生们所能给予一位退休教授的最高荣誉。希尔伯特向学生们回敬的是这样一句话："数学，万岁、万岁、万岁！"

希尔伯特把一生的精力都奉献给了他所热爱的数学事业，他对新一代数学家所产生的如此强大和神奇的影响，在数学史上是罕见的。然而，这样一位伟大学者和教育家的晚年，却是在苦闷和孤独中度过的。纳粹的反动统治直接破坏了希尔伯特创建的哥廷根数学学派，他的许多亲密朋友、同事和合作者遭到纳粹政权的迫害，有的流亡国外，有的迫害至死。外尔和艾米·诺德于1933年首先去了美国，接着柯朗、德恩、德拜、弗里德里希、史密特、贝尔纳斯和冯·诺伊曼等优秀数学人才也相继离开德国。他的晚年助手、年轻的数理逻辑学家甘岑(G. Gentzen, 1909～1945）于1939年被纳粹逮捕和监禁，死于1945年。他的最老的学生、长期合作者布鲁门萨尔被撤去教授职务长期流亡国外，后被盖世太保逮捕，1944年底死于赛尔辛斯

塔集中营。就连希尔伯特本人也遭到无端审查，有人曾以他的姓“大卫”，怀疑他不是纯雅利安人，还有人以柯朗曾为他输过血，指责他的血管里流动着犹太人的血。这一切给希尔伯特带来了极大的失望和悲痛，过去他那双刚毅和聪慧注视着世界的眼睛，渐渐蒙上了一层忧伤和怀疑的色彩，往日的数学热情已不复存在。在1937年希尔伯特的生日宴上，当有人向他提起往日的相当重要的学术活动时，他根本就记不起来了，他解释说：“我感兴趣的只有天上的星星了”。

1942年的一天，希尔伯特跌倒在哥廷根的大街上，摔断了胳膊，接着又引起了各种并发症。1943年2月14日，他在冷漠和孤独中与世长辞了，享年81岁。丧礼是在家中举行的，只有10来个人出席。阿诺德·索末菲，希尔伯特的物理学朋友，特地从慕尼黑赶来，他站在棺柩旁边讲述了这位数学家伟大一生的重要工作。戛斯塔夫·赫格洛兹代读了慕尼黑的卡拉温铎利(C. Cartheodory)在病床上为希尔伯特写的悼词。在悼词中，卡拉温铎利指出，希尔伯特一生的最高准则是绝对的正直和诚实，他对同时代数学家的影响，可用这样一句既生动又具体的话来说明：“你使得我们所有的人，都仅仅在思考你想让我们思考的问题！”希尔伯特的安葬仪式很简单，墓碑上仅仅刻着姓名和日期。

战争期间，为了保护人类的文化遗产，同盟国的飞机没有轰炸哥廷根这座古城。随着第二次世界大战的结束，世界数学的优势从德国转移到了美国。哥廷根城虽然完整无损，可是她却失去了世界数学中心的地位。然而哥廷根的数学巨人并没有因之而失去他对世界数学发展的影响。整个世界，几乎到处都有希尔伯特的学生，以及希尔伯特学生的学生。他们把希尔伯

特的科学精神和哥廷根的科学传统传播到世界各地，使它们至今仍然闪耀着光芒。对于希尔伯特在现代数学发展中的影响，也许再没有比他的学生、现代著名数学家外尔所说的一句话更加深刻和生动的了：“希尔伯特这位吹笛人所吹的甜蜜的芦笛声，它诱惑着许多老鼠跟着他投入了数学的深河。”

附录 I

希尔伯特23个问题*

1. 康托尔的连续统基数问题

两个系统，即两个通常的实数集或点集，被认为是（按康托尔的说法）等价的或是有相等的基数，如果它们相互间可以建立起一种关系，使得一个集合中每个数都对应并且只对应于另一集合中一个确定的数。康托尔关于这种集合的研究，提出了一个似乎很合理的定理，可是，尽管经过坚持不懈的努力，还没有人能成功地证明这条定理。这定理是这样的：

每个由无穷多实数组成的系统，即每个（无穷）数集（或点集），或者等价于自然数的集合1，2，3，……，或者等价于全体实数的集合，从而等价于连续统即一条直线上点的全体；因此，就等价关系而言，只有两种（无穷）数集，可数集和连续统。

由这条定理，立即可以得出结论：连续统所具有的基数，紧接在可数集基数之后；所以，这定理的证明，将在可数集与连续统之间架起一座新的桥梁。

让我来讲述康托尔的另一个值得重视的命题，它与已经提到的那个定理有极为密切的关系，并且也许会给该定理的证明

---

* 参见大卫·希尔伯特"数学问题"，李文林、袁向东译，《数学史译文集》，上海科学技术出版社1981年。这里省略了原文中的脚注。

提供一把钥匙。任一实数系统被认为是有序的，如果对于系统中任意两个数，可以判别哪一个在前，哪一个在后，同时此种判别方法具有这样的性质，使得若a在b之前，b在c之前，则必有a在c之前。一系统中数的自然排列被定义为：按照这种排列，较小的数恒在较大数之前。但是容易看出，一系统的数可以按无限多种其它的方式来进行排列。

我们设想数字的某一确定的排列，并且从这些数中选出一个特殊的数系，即选出一个所谓部分系统或部分集合，那么可以证明，这个部分系统也是有序的。现在，康托尔考虑一种特殊类型的有序集，他称之为良序集，它们可以这样来刻划：不仅是集合本身，而且每个部分集合都有一个首数。整数系 1，2，3，……，按其自然顺序显然是一个良序集。相反地所有实数的系统即连续统按其自然顺序却显然不是良序集。因为，如果我们把直线上一个除去了起点的线段看作我们的部分集合，它将没有首元素。

现在提出的问题是：实数全体是否可以按其它方式排列，使得每个部分集合都有一个首元素，也就是说，连续统是否能够被看作为良序集——康托尔认为这问题的答案是肯定的。我感到迫切需要的是对康托尔这一值得注意的命题作出直接的证明，这种证明多半是通过实际地给出一种数的排列，使能够在每个部分系统中指出一个首元素。

2．算术公理的相容性

在研究一门科学的基础时，我们必须建立一套公理系统，它包含着对这门科学基本概念之间所存在的关系的确切而完备的描述。如此建立起来的公理同时也是这些基本概念的定义；并且，我们正在检验其基础的科学领域里的任何一个命题，除

非它能够从这些公理通过有限步逻辑推理而得到，就不能认为是正确的。更进一步的研究会提出这样的问题：这组公理中个别公理的确定陈述是否以某种方式相互依赖呢？如果我们希望达到一种全体互相独立的公理系统，这种公理是否因此就不能包含共通的部分而必须将那些共通部分隔离出去？

但是，我想首先指出下述的问题，在关于公理所能提出的许多问题中，下述问题最为重要，这问题是：证明这些公理不互相矛盾，就是说，以它们为基础而进行的有限步骤的逻辑推演，决不会导致矛盾的结果。

在几何学中，公理相容性的证明可以这样来实现，即构造一个适当的数域，使得域中数字之间的类似关系与几何公理相对应。几何公理演绎中的任何矛盾，必定能在该数域的算术中得到识别。这样，所要求的几何公理相容性的证明，便归结为算术公理的相容性定理。

另一方面，为了证明算术公理的相容性，就需要一种直接的方法。算术公理实质上无非就是熟知的运算规则，再加上连续公理。最近我把所有公理集合起来，同时用两条较为简单的公理来代替连续公理，这两条公理就是众所周知的阿基米德公理和另一条大体上如下所述的新公理：数所形成的系统，当它满足所有其它公理时，不可能再作进一步的扩充（完备性公理）。我坚信，通过对无理数理论中熟知的推理方法的仔细研究和适当变更，一定能够找到算术公理相容性的直接证明。

为了从另一个角度来说明这问题的意义，我要补充下述观点：如果一个概念具有矛盾的属性，那我就认为这概念在数学上不存在，比如平方等于－1的实数在数学上是不存在的。而倘若能证明：这概念所赋有的属性在经历有限的逻辑过程后决不

会导致矛盾，我就认为这概念（例如满足一定条件的数或函数）在数学上的存在性得到了证明。在目前的场合，我们关心的是算术中的实数公理，此时算术公理的相容性的证明同时也就是完备的实数系或连续统的数学存在性的证明。确实，算术公理相容性的证明一旦得到充分解决，不时产生的关于完备的实数系是否存在的怀疑就将变得毫无根据。实数的全体，亦即上面所指明的意义上的连续统，并不是一切可能的十进分数展开的全体，也不是其元素按一切可能规则排列的基本序列的全体。确切地说，它是一种事物系统，这些事物之间的相互关系受着所设公理的支配，同时对于它们来说，所有那些能通过有限的逻辑步骤而从公理推得的命题，并且也只有这样一些命题，才是正确的。我认为，连续统的概念仅仅在这样的意义上才能严格地从逻辑上站住脚跟。在我看来，这实际上也最符合于我们的经验与直觉。那么，连续统的概念，乃至一切函数所组成的系统的概念，它们的存在，其意义与例如整数系、有理数系或者与康托尔的高阶数类和基数完全相同。因为我相信后者的存在性同连续统一样，可以在我已经描述过的意义上得到证明；所有基数组成的系统，或者所有康托尔的阿列夫组成的系统则不一样，对于它们，可以证明，不能建立在我所说的意义上相容的公理系统。因此，按照我的术语，这些系统无论那一个在数学上都是不存在的。

在几何基础方面，我想提出下列问题：

3. 两个等底等高的四面体体积之相等

在给格林（Gerling）的两封信中，高斯对于一些立体几何的定理依赖于穷竭法，即依赖于现代用语中所说的连续公理（或阿基米德公理）而表示不满。高斯特别提到欧几里得定

理，这定理说：两个等高的三棱锥，其体积之比等于底面积之比。现在，平面上的类似问题已经解决。格林还通过将图形剖分为全等的部分来成功地证明两对称多面体体积之相等。虽然如此，我认为对于刚才提到的欧几里得定理，似乎不可能作这种一般的证明，我们的任务则是给这种不可能性以严格的证明。这是可以做到的，只要能够成功地举出两个等高等底的四面体，我们不能将它们剖分为全等的四面体，同时也不能拼补上全等的四面体使形成两个本身可以剖分为全等部分的四面体。

4. 直线作为两点间最短距离的问题

另一个与几何基础有关的问题是这样的：如果我们从建立欧几里得几何所必须的公理中除去平行公理，或者假设它不被满足，但保留所有其它公理，那么如所周知，我们就得到罗巴切夫斯基几何（双曲几何）。我们因此可以认为这是一种与欧几里得几何相并列的几何学。如果我们再进一步要求“一直线上的三点有并且只有一点位于其它二点之间”这样一条公理不成立，我们就得到黎曼（椭圆）几何，这种几何因此似乎又与罗巴切夫斯基几何相并列。如果我们希望对阿基米德公理进行类似的研究，那就应该认为这条公理没有被满足，由此我们达到非阿基米德几何学，这种几何曾经被维隆奈士（Veronese）和我本人研究过。现在要提出更为一般的问题：从其它启发性的观点出发，是否可以建立起有同样的权利与欧几里得几何相并列的几何学？在这里，我想请你们注意一条定理，它事实上一直被许多作者用作为直线的定义，这定理就是：直线是两点之间最短距离。这命题的实质性内容可归结为欧几里得定理，即三角形中两边之和永远大于第三边——容易看出，这条定理

只涉及基本的概念，也就是说只涉及那些可以由公理直接导出的概念，因而就更易于进行逻辑研究。欧几里得借助于以合同公理为基础的外角定理证明了这条定理。现在不难明白，欧几里得的这条定理，不能只在那些仅仅与角度和线段有关的合同定理的基础上获得证明，而必需要有三角形的合同定理。于是，我们要来寻找一种几何，在这种几何里，除了三角形合同公理外，所有通常的欧几里得几何公理特别是所有其它的合同公理都成立（或者除了"等腰三角形底角相等"定理之外的所有定理都成立），同时，在这种几何中，"三角形两边之和大于第三边"这条命题被看作为一条特殊的公理。

我们发现，这样一种几何确实存在，它不是别的，正是闵可夫斯基在其著作《数的几何》中构造的、并且作为他的算术研究之基础的几何学。闵可夫斯基几何因此也是一种与通常欧几里得几何相并列的几何学；它本质上为下列两条性质所刻划：

（1）与定点O距离相等的点，位于通常欧氏空间中一张以O为中心的闭凸曲面上。

（2）两个线段被认为是相等的，如果我们可以通过通常欧氏空间中的一个平移将一个放到另一个之上。

在闵可夫斯基几何中平行公理也成立。通过对"直线是两点之间的最短距离"这一定理的研究，我建立了一种几何，在其中平行公理不成立，而闵可夫斯基几何中所有其它的公理都被满足。直线是两点之间的最短距离这一定理以及实质上等价的、与三角形之边有关的欧几里得定理，不仅在数论而且在曲面论和变分学中起着重要作用。由于这个原因，并且因为：我相信对于该定理成立条件的深入研究将会给距离的概念以及其

它的基本概念（例如平面的概念和通过直线概念来定义平面的可能性）以新的解释，所以，在我看来，这种可能的几何学的构造与系统研究是十分必要的。

5．李（S. Lie）的连续变换群概念，不要定义群的函数的可微性假设

如所周知，李借助于连续变换群的概念，建立了一组几何公理，并且从他的群论观点出发，证明这组公理对于建造几何学来说是足够了。然而，恰恰是在其理论的基础部分，李假设了定义群的函数必须可微，因此在李的研究中还留下一个没有解决的问题：与作为几何公理的问题有关，可微性假设是否确实必不可少呢？它会不会就是群概念本身和其它公理的推论？这个问题，以及与算术公理有关的一些其它问题，向我们提出一个更一般的问题：如果在我们的研究中不要函数可微性的假设，那李的连续变换群概念能走多远？

李将有限连续变换群定义为一变换系统：

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; a_1, \cdots, a_r) \quad (i = 1, \cdots, n).$$

它们具有这样的性质，即从中任选两个变换，

例如 $\quad x_i' = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; a_1, \cdots, a_r)$，

$\quad x_i'' = f_i(x_1', x_2', \cdots, x_n'; b_1, \cdots, b_r)$，

它们相继作用所产生的变换也属于原来的系统，因而可以表成形式

$$\begin{aligned} x_i'' &= f_i\{f_1(x, a), \cdots, f_n(x, a); b_1, \cdots, b_r\} \\ &= f_i(x_1, \cdots, x_n; c_1, \cdots, c_r), \end{aligned}$$

此处$c_1, \cdots, c_r$是$a_1, \cdots, a_r$和$b_1, \cdots, b_r$的某些函数。这样，群的性质便由一组函群方程而得到充分的表达，它本身并没有对函数$f_1, \cdots, f_n; c_1, \cdots, c_r$提出附加的限制。但李在进一

步处理这些函数方程时，也就是说在推导著名的基本微分方程时，却必须假设定义群的函数的连续性和可微性。

关于连续性，这一假设目前肯定还要保留——只要我们的目的在于几何的和算术的应用，在这种应用里，问题中函数的连续性是连续公理的推论。相反，定义群的函数的可微性则包含着一种假设，这种假设，作为几何公理只能以相当生硬和复杂的方式来表达。因此就发生这样的问题：对于某一变换群，是否总能通过引进适当的新变量和新参数，使得其定义函数成为可微；或者至少可能借某种简单的假设，使它变换为容许进行李氏方法的群。根据李所指出但首先为邵尔（Schur）所证明的一条定理，当群是可迁群并假设定义群的函数有一阶导数及某些二阶导数，总可以将它化归为解析群。

对于无限群，我相信相应问题的研究也是有意义的。这样我们又被引向广阔而有趣的函数方程领域，直到目前为止，这一领域通常只在所含函数可微分的假设下被加以研究。特别是为阿贝尔极其巧妙地处理过的函数方程、差分方程和数学文献中所出现的其它方程，它们并不直接涉及任何有关函数必须可微的要求。在探求变分学中某些存在性证明时，我干脆碰到过这样的问题：从一个差分方程的存在性来证明所考察的函数的可微性。于是，在所有这些场合中产生的问题是：我们在可微函数情形下得到的结论，在除去可微性假设后，经过适当修改，将在多大的程度上保持正确？

需要进一步注意的是：闵可夫斯基在上面已经提到的《数的几何》一书中从函数方程

$$f(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n) \leqslant f(x_1, \cdots, x_n) + f(y_1, \cdots, y_n)$$

出发，确实成功地证明了问题中所出现的函数的某些微商的存

在性。

另一方面，我想强调这样的事实，即肯定存在解析的函数方程，它们的唯一解是不可微函数。例如，可以构造一个单值、连续但不可微的函数$\varphi(x)$，它表示两个函数方程

$$\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)=f(x), \quad \varphi(x+\beta)-\varphi(x)=0$$

的唯一解，此处α和β是实数，$f(x)$则是对一切实值x的一个正则解析单值函数。这样的函数可以非常简单地借三角级数而得到，其方法与波莱尔为了构造某个偏微分方程的双周期非解析解所用过的相似（根据毕加最近的一个声明）。

6. 物理公理的数学处理

几何基础的研究提示了这样的问题：用同样的方法借助公理来研究那些在其中数学起重要作用的物理科学，首先是概率论和力学。

关于概率论公理：在我看来，其逻辑研究应与数学物理以及特别是气体运动论中均值方法的严格而充分的发展相结合。

在力学基础方面，物理学家所做的重要研究随手可举；我要提出的马赫（Mach）、赫兹（Hertz）、波尔兹曼（Boltzmann）和福克曼（Volkmann）的著作。因此，迫切需要数学家们也来开展对力学基础的讨论。这样，波尔兹曼关于力学原理的著作，提出了从数学上来研究由原子论观点导出连续介质运动规律的极限过程的问题，他在那里只是作了简单的陈述。相反地我们必须试图通过一种极限过程从一组公理出发来推出刚体运动的规律，这组公理依赖于连续地充满整个空间的介质的连续变化条件，而这些条件则是由参数来确定的。所以，关于不同公理系统的等价性问题，总是具有很大的理论意义。

如果用几何学作为处理物理公理的模型，那我们首先就要

试图借助于少量的公理来概括尽可能广泛的一类物理现象，然后再加进新的公理逐渐地过渡到更特殊的理论。同时，李的分类原理也许可以从无限变换群的深刻理论导出。数学家不仅要注意那些接近于客观实在的理论，而且象在几何学中一样，也要注意一切逻辑上可能的理论。他必须精密而细致地对从所设公理推出的全部结论进行完备的考察。

更进一步，在每个场合，数学家都有责任确切地检验一下新公理是否与原来的公理相容。物理学家，随着其理论的发展，经常发现自己为实验结果所迫而要作出新的假设，关于这些新假设与老公理的相容性，他只能依赖于这些实验，或是依赖于某种物理直觉，某种严格地从逻辑上去建立一门理论时并不容许的实践。在我看来，所要求的关于所有假设相容性的证明，同样是很重要的，因为实现这种证明的努力，必定会促使我们最有成效地对这些公理作出精确而系统的陈述。

到现在为止，我们考察的只是与数学的基础有关的问题。确实，一门科学的基础的研究总是特别富有吸引力，对基础的检验永远是研究者们最重要的问题。外尔斯特拉斯曾经说过："最终目标要永远牢记在心，那就是达到对基础的正确理解……，但是为了使科学有所前进，个别问题的研究是必不可少的。"事实上，为了成功地研究一门科学的基础，就必须对它的专门理论有深入的理解。只有对建筑物的目的有透彻的和细节上的了解的建筑师，才能为这座建筑奠定坚实的基础。我们现在就要转向各个数学分支的特殊问题，首先是考察算术和代数。

7．某些数的无理性和超越性

爱米特(Hermite)关于指数函数的算术定理和林德曼(Lindemann)对它们的扩广，肯定会受到各代数学家们的赞赏。

这就立刻提出了这样的任务：沿着已经开辟的途径深入前进，正如赫尔维茨（Hurwitz）在两篇有意义的论文“论某些超越函数的算术性质”中所做的那样。因此，我想概要地提出一类问题，按照我的看法，是应当马上就着手解决的。某些在分析中很重要的特殊的超越函数，对某些代数变数取代数值，这个事实在我看来是特别令人注意和值得深入研究的。的确，一般说来，我们希望超越函数即使对代数变数也将取超越值，我们仍然认为，有一种超越函数例如指数函数$e^{i\pi z}$，它对一切有理变数z显然取代数值，另一方面却很可能对变数z的无理代数值恒取超越值。我们也可以给这命题以如下的几何形式：

如果在一等腰三角形中，底角与顶角之比是代数数但非有理数，则底与腰之比恒为超越数。

虽然这个命题很简单并且与爱米特和林德曼已解决的问题有相似之处，但我认为这定理的证明是非常困难的；下述命题的证明也是如此：

对于代数底数α和无理代数指数β，表达式α^{β}，例如数$2^{\sqrt{2}}$或$e^{\pi}=i^{-2i}$，表示一超越数或至少是一无理数。

毫无疑问，这个问题以及类似问题的解决，对于探讨特殊的无理数和超越数的性质，必定会带来新的方法和新的见解。

8．素数问题

最近，阿达玛（Hadamard）、德·拉·瓦雷—布桑（De La Vallée—Poussin）、冯·蒙戈尔特（Von Mangoldt）和其他人在素数分布论方面取得了重大进展。然而，为了完全解决黎曼的论文“论小于给定数的素数个数”向我们提出的问题，还需要证明极其重要的黎曼猜想的正确性，也就是说要证明：由级数

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

所定义的函数$\zeta(s)$的零点，除了众所周知的负整实数外，全都具有实部1/2。这个证明一旦获得成功，接下去的问题就是要更精确地考察黎曼的无限级数，以便估计小于一给定数的素数个数。特别是要确定：小于数x的素数个数与x的对数积分之差是否确实相当于x的阶数不超过1/2的无穷大。更进一步，我们必须确定：在计算素数过程中注意到的素数偶然凝聚的现象，是否确实是由黎曼公式中那些依赖于函数的最初一些复零点的项所引起。

对黎曼素数公式进行彻底的讨论之后，我们或许就能够去严格地解决哥德巴赫（Goldbach）问题，即是否每个偶数都能表为两个正素数之和；并且能够进一步着手解决是否存在无限多对差为 2 的素数问题，甚至能够解决更一般的问题，即线性丢番图方程$ax+by+c=0$（具有给定的互素整系数）是否总有素数解x和y。

然而，我认为下列问题也是颇有意义的，并且或许意义更大：把对于有理素数分布所获得的结果应用到给定数域k中的理想素数分布论上去——这问题有待于属于该域并由级数

$$\zeta_k(s)=\Sigma\frac{1}{n(j)^s}$$

所定义的函数$\zeta_k(s)$的研究，此处和号遍及给定域k中的一切理想数j，$n(j)$表示理想j的模。

我还想提出三个更特殊的数论问题：一个是关于互反律的，另一个是关于丢番图方程的，第三个则来源于二次型的领域。

9. 任意数域中最一般的互反律之证明

在任意数域上对l次幂剩余证明互反定律，此处l表示一奇素数，更进一步，l是2的幂或一奇素数的幂。

这条定律，以及证明这定律的主要方法，我相信将会通过适当地推广我所研究过的l次单位根域和相对二次域的理论而得到。

10. 丢番图方程可解性的判别

给定了一个有任意个未知数的、系数为有理数的丢番图方程，试设计一种方法，根据这种方法可以通过有限步运算来判别该方程是否有有理整数解。

11. 系数为任意代数数的二次型

现在已经有的二次数域理论使我们可以成功地攻克系数为任意代数数的具有任意个变数的二次型理论。特别地，可以引导出一个有趣的问题：给定一个系数为代数数的多变元二次方程，求属于由系数所生成的代数有理域中的整数或分数解。

下述重要的问题可以成为到代数和函数论的过渡。

12. 阿贝尔域上的克隆尼克定理在任意代数有理域上的推广

克隆尼克有一条定理：每一个阿贝尔数域可经有理数合成一些单位根域而得到这个整数方程论中的基本定理包含两点陈述，即：

第一，它回答了这样的问题：具有给定次数、给定阿贝尔群和给定的对于有理数域的判别式的那些方程的数目和存在性。

第二，它指明，这样的方程的根形成一个代数数域，它和在指数函数$e^{i\pi z}$中依次给变元z以一切有理数数值得到的域相重合。

第一点陈述是和由其群及分支来决定某些代数数的问题相关的。因此，问题相当于去决定对应于给定黎曼曲面的代数函数这一熟知的问题。第二点陈述给出了用超越方法（即按指数函数$e^{i\pi z}$）所要求的那些数。

因为虚二次数域这个域是除有理数域外最简单的，于是产生一个问题，将克隆尼克定理推广到这种情形。克隆尼克本人曾断言，在一个二次域上的阿贝尔方程由带奇异模的椭圆函数之变换方程给定。此处，椭圆函数起的作用，可想象成上述情况下指数函数所起的同样的作用。克隆尼克猜想的证明至今没有给出。但是，我相信它是一定能得到的，根据韦伯（H. Weber）发展起来的复乘法理论，并借助我建立的关于类域的纯算术定理，做到它不会有太大的困难。

最后，我以为最重要的是把克隆尼克定理推广到这种情形，即用任意的代数域（只要是被当作有理的领域建造的）来代替有理数域或虚二次域。

此问题从许多立足点出发都会碰到。它的算术方面，我认为最重要的关键是任意给定数域中l次幂剩余的一般互反律。

至于问题的函数论方面，凡在这个有吸引力的领域工作的研究者，将会从单变量代数函数理论和代数数理论之间的明显类比中获得指导。汉塞尔（Hensel）针对代数函数的幂级数展开，提出并研究了在代数数理论中的模拟；兰兹贝格（Landsberg）讨论了黎曼——洛克定理(Riemann-Rochtheorem)的模拟。黎曼曲面的亏格和数域的类数之间的类比也是明显的。考虑亏格$p=1$的黎曼曲面（仅触及最简单的情形），另一方面考虑类$h=2$的数域。那么，该黎曼面上存在一个处处有限的积分之证明，相应于在该数域中存在一个整数a，使得数

$\sqrt{\alpha}$代表一个二次域且对于基域是相对不分歧之证明。众所周知，代数函数论中的边界值法（Randwerthaufgabe）用于证明黎曼存在性定理。在数域论中，证明恰好存在这样的数α同样是最困难的。该证明得以成立必需要借助下述定理：在数域中，对应给定的剩余性质有相应的素理想存在。因此，后一事实是边界值问题在数论中的模拟。

大家熟知，代数函数论中阿贝尔定理的方程表示一个充分必要条件，所考虑的黎曼面上的那些点是属于该曲面的一个代数函数的零点。阿贝尔定理在类$h=2$的数域论中的精确模拟是二次互反律方程

$$\left(\frac{\alpha}{j}\right)=+1,$$

它断言理想j是该数域的主理想当且仅当数α关于理想j的二次剩余是正的。

我们将会看到，刚才描述的问题中，数学的三个基本分支，数论、代数和函数论互相得到最密切的接触。而且我确信，假如能成功地找到并讨论那些函数，它们在任意代数数域中起的作用，就如同指数函数在有理数域及椭圆模函数在虚二次数域中所起的作用一样，那么多变数的解析函数理论将会有引人注目的发展。

进入代数方面，我要提一个来自方程论的问题和一个我从代数不变量理论中引出的问题。

13. 不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程

诺模图处理这样的问题：画若干依赖于一个任意参数的曲线族，用它来解方程。立即可以看出，系数仅依赖于两个参数（即系数为任意有两个独立变量的函数）的方程，按照作诺模

图的原理，它所有的根能够用多种方式表出。进而一大类有三个或更多变量的函数，显然也可单独依此原理表出而无需利用可变元。这是指所有那样的函数，首先可以构造一个两变元函数将其生成，其中每一变元又等于一个具两个变元的函数，然后又可依次用两变元函数来替代每个变元。这里允许插入任意有限个两变元函数。例如，每一个具有任意个变元的有理函数都属于可由诺模图表构造的这个函数类，因为它可以经加、减、乘、除运算生成，而每一运算只产生仅有两变元的函数。很容易看出，在通常的有理域中，所有根式可解之方程的根属于这类函数，因为这里的求根法仅和四种算术运算相联系。实际上，它只是一个变量的函数。同样，一般的五次方程和六次方程也可按适当的诺模图表来解，因为根据兹切恩霍森（Tschirnhausen）变换（它只需要用开方法），它们能化简成一种系数仅依赖于两个变数的形式。

七次方程的情形也许是这样的：它的根是其系数的函数，但不属于用诺模图构造的这类函数，即它不能由有限次插入两变元函数来构成。为了证明这一点，大概必须证明七次方程 $f^7+xf^3+yf^2+zf+1=0$ 不能借助于仅含两变元的任意连续函数解出。请允许我说明我已经严格证明了存在三变元 x、y、z 的解析函数，它不能经由有限个仅含两变元的函数得到。

利用辅助的可移动的元素，诺模图法成功地构造了多于两变元的函数，杜甘（d'Ocagne）最近就对 7 次方程的一种情形得到了证明。

14. 证明某类完全函数系的有限性

在代数不变量理论中，我认为关于形式之完全系的有限性问题应受到特别的重视。最近，莫勒（L. Maurer）已经成功

地把由果尔丹（P. Gordan）和我证明的不变量理论中的有限性定理推广到这样一种情形：即选用任意子群来代替一般射影群作为定义不变量的基础。

在这个方向上赫尔维茨已迈出了重要一步，他用一种巧妙的方法，最一般化地证明了任意基本形式的正交不变量系之有限性。

研究不变量之有限性的课题把我引向一个简单的问题，原课题是它的特殊情形，而它的解决大概需要更加精细地去研究消元法理论和克隆尼克的代数模系。

设给定m个具有n个变量x_1，x_2，…，x_n的有理整函数X_1，X_2，…，X_m：

$$(S)\qquad \begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_n), \\ X_2 &= f_2(x_1, \cdots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m &= f_m(x_1, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

每一个X_1，…X_m的有理整组合，用上面的表示式代入后显然总是$x_1 \cdots x_n$的有理整函数。这里可能有X_1，…，X_m的有理分式函数，经置换（S）的运算后，它化为x_1，…，x_n的整函数。每一个X_1，…，X_m的有理函数，若经置换（S）后化为x_1，…，x_n的整函数，我提议称它是X_1，…，X_m的**相对整**函数。明显地，所有X_1，…，X_m的整函数也是它的相对整函数；相对整函数的和、差及积也皆为相对整函数。

现在问题归结为：是否总是可能找到X_1，…，X_m的相对整函数之有限系，使X_1，…，X_m的所有其他的相对整函数都可以由它有理且整地表出。

如果我们引进有限整性域的概念，就能把问题讲得更简单。

所谓有限整性域，我是指一个函数系，从中能够选出有限个函数，该系中所有其它函数都可由它们有理且整地表出。于是，我们的问题相当于：证明任给有理性域上所有相对整函数总是构成一个有限整性域。

对我们来说，很自然地会按数论中的限制来精密化地提出这个问题，即假定所给函数f_1，…，f_m的系数是整数，在$X_1, \cdots, X_m$的相对整函数中仅包括这样一些X_1，…，X_m的有理函数，它们经置换(S)后化为$x_1, \cdots, x_n$的带有有理整系数的有理整函数。

下面是经精炼后问题的一种简单的特殊情形，设X_1，…，X_m是变量x的带有有理整系数的有理整函数，P是一个素数。考虑如下形式的有理整函数系

$$\frac{G(X_1, \cdots, X_m)}{P^h},$$

其中G是变元X_1，…，X_m的有理整函数，P^h是素数P的任意次幂。我较早的研究论文直接证明了：对固定的指数h，所有这样的表示式形成一个有限整性域。但问题在于对所有的指数h，结论是否成立，亦即是否可以选择有限个这样的表示式，使得对每一个指数h，所有这种形式的表示式都可以由它们有理且整地表出。

在代数和几何之间的边缘部分，我提两个问题。一个是关于计数几何的，另一个是关于代数曲线和曲面的拓扑的。

15. 叔伯特（Schubert）计数演算的严格基础

问题是这样的：叔伯特曾以所谓特殊位置原理或数的守恒原理为基础，按照由他发展起来的计数演算法来决定一些几何数，现在要严格地确定这些数并准确地确定它们有效的范围。

虽然现代的代数在原则上保证了进行消元法的可能性，但

证明计数几何的这条定理反而显得更有必要，换言之，在对特殊形式的方程具体进行消元法时，用计数演算也许可以事先知道最后方程的阶和它们的解的重数。

16．代数曲线和曲面的拓扑

n 阶平面代数曲线所具有的闭且孤立之分支的最大数目已有哈那克（Harnack）所确定。进而提出下一步的问题：这些分支在平面上的相对位置。关于六次曲线，我用复杂的分法得出一个自己确信无疑的结果，即按照哈那克定理所给出的11条分支，绝不是两两互不包含的，其中必存在一条分支，它的内部有一条而外部有九条分支，或者相反。我认为，在孤立分支达到最大的情况下，彻底研究它们的相对位置是非常重要的，同样重要的是相应地研究空间代数曲面的叶的数目、型和位置。可是到目前为止，甚至三维空间中四阶曲面所具有的叶之最大数目也仍是个谜。

跟这个纯粹代数问题相关联的，我想提出另一个问题，我认为它也许可以用连续地改变系数的方法去攻克。答案应该给出一个值，它是对应于微分方程所定义之曲线族的拓扑的。这就是求如下一阶一次微分方程的彭加勒边界环（极限环）的最大数目和位置

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X},$$

其中X、Y是x、y的 n 次有理整函数。写成齐次形式为

$$X\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+Y\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)$$

$$+Z\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0,$$

其中X、Y和Z是x、y、z的n次齐次有理整函数，而x、y、z是作为参数t的函数被确定的。

17. 正定形式的平分表示式

带有实系数的任意个变数的有理整函数或形式称做是正定的，若变数取任意实值时它都不能变为负的。所有正定形式所成的系对加法和乘法运算是不变的，而两个正定形式的商——此时它应是那些变数的整函数——也是一个正定形式。但是因为（如我所证明的）不是所有的正定形式都能由形式的平方经加法合成，于是就产生了这样的问题——我已对三元形式的情形作了肯定的回答——是否不能把所有的正定形式都表成形式的平方和之商。同时，对某些牵涉几何作图的可能性问题，又希望知道在表示式中用到的形式之系数是否可能总是取自被表形式之系数所生成的有理域。

18. 由全等多面体构造空间

若寻求在平面上存在有基本区域的运动群，我们会得到许多种回答，这要依据所考虑的平面是黎曼的（椭圆的），欧几里得的或是罗巴切夫斯基的（双曲的）而定。在椭圆平面的情况，这里有有限个本质上是不同类的基本区域。为了完全覆盖全平面，有限个全等区域就够了；而群也确实仅有有限个运动组成。在双曲平面的情形，这儿有无限个本质上是不同类的基本区域，即著名的彭加勒多边形。但为了完全覆盖平面，必须要无穷多个全等区域。欧几里得平面的情形介于两者之间，因为此时仅有有限个本质上不同类的运动群及基本区域，而为了完全覆盖全平面确需要无穷多个全等区域。

在三维空间中，相应的事实都可以找到。在椭圆空间，运动群的有限性是约当（C. Jordan）基本定理的直接推论，该

定理说：本质上不同类的n变数的线性置换的有限群个数不超过某个依赖于n的有限的界限。双曲空间中，有基本区域的运动群被弗留克（Fricke）和克莱因在一些关于自守函数理论的讲义中探讨过。最后，菲得罗夫（Fedorov）、斯可弗莱斯（Schoenflies）和稍晚的罗恩（Rohn）给出了证明：在欧几里得空间，仅有有限个本质上不同类的带有基本区域的运动群。现在，适合于椭圆和双曲空间的结果和方法对n维空间也同样成立，可是欧几里得空间的定理之推广出现了明显的困难。因此，希望研究下述问题：在n维欧几里得空间中是仅有有限个本质上不同类的带有基本区域的运动群吗？

每一个运动群的基本区域和由群产生的全等区域一起，显然完全充满空间。问题是：是否也存在这样的多面体，它不是作为运动群的基本区域而出现，但经由它的全等多面体适当的毗连，仍然可能完全充满整个空间。和前述问题有关的，我要指出下面一个问题，它对数论是重要的，对物理和化学有时也许有用：怎样能够把无限个相等的给定型式之立体，如给定半径的球，或给定边长（或给定位置）的正四面体，在空间中给以最紧密的排列。也就是说，怎样才能够把它们配置得更合适，使空间中被它们填满的部分和未被填到的部分之比尽可能地大。

假如我们统观上个世纪函数论的发展，首先会注意到有一类函数所处的特别重要的地位，现在我们把这类函数定名为解析函数。它也许将持久地成为数学研究的中心。

根据很多不同的观点，我们大概可以从所有想象得到的全部函数中，选择出涉及范围很广的一些函数类，它们值得加以特别彻底地研究。例如，考虑由常或偏的代数微分方程所描述

的函数类。但应注意，这类函数不包含数论中出现的有最重要研究价值的函数。象前面提到过的函数$\zeta(s)$就不满足代数微分方程，同样，如果你参看一下霍德（Höldor）证明的定理，借助$\zeta(s)$和$\zeta(1-s)$之间的著名关系，很容易看出函数$\Gamma(x)$也不满足代数微分方程。还有，由无穷级数定义的两个变量s和x的

$$\zeta(s, x)=x+\frac{x^2}{2^s}+\frac{x^3}{3^s}+\frac{x^4}{4^s}+\cdots$$

函数，它跟函数$\zeta(s)$有密切的关系，大概仍不满足代数偏微分方程。在研究此问题时，将必须用到函数方程

$$x\frac{\partial\zeta(s, x)}{\partial x}=\zeta(s-1, x)。$$

此外，倘若从算术或几何的角度转而考虑所有连续且无穷可微之函数的类，我们在研究它时又不得不舍弃得心应手的工具——幂级数——和这样一个结论，即只要在任意的无论怎样小的区域中给函数以指定的值，那么函数就被完全确定了。所以，前段提到的函数领域的界限太窄了，而这段所说的我认为又太宽了。

另一方面，解析函数的概念蕴含了科学上最重要的函数的全部财富，这些函数有的发端于数论、微分方程或代数函数方程论，有的产生于几何或数学物理，因此，在整个函数的王国中，解析函数合理地保持着那无可争议的皇位。

19. 正则变分问题的解必定是解析的吗？

我认为，在解析函数论基础方面，最值得注意的事实是：存在着这样的偏微分方程，它们的所有积分必为独立变元的解析函数，简而言之，就是存在着除解析解外没有其它解的微分方程。这类偏微分方程中最著名的就是位势方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

以及毕加所研究过的某些线性微分方程；还有方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^f$$

极小曲面的偏微分方程和其它的方程。这些偏微分方程大多数都有一个共同的特性，即它们都是某类变分问题也就是下述变分问题的拉格朗日微分方程

$$\iint F(p,q,z;x,y)dxdy=\text{minimum}\left[p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}\right]。$$

F本身是一解析函数，对于所讨论的范围内变量的一切值，满足不等式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}\right)^2>0\ 。$$

我们将称这类问题为正则变分问题。在几何学、力学和数学物理中起作用的，主要就是正则的变分问题。很自然会提出这样的问题：正则变分问题的一切解是否一定是解析函数。换句话说，是否每个正则变分问题的拉格朗日偏微分方程都有这样的性质：它们只容许有解析积分？并且甚至当函数受到限制，例如象在位势函数的狄里克莱问题中那样取连续的但非解析的边界值时，情形是否仍是这样呢？

我要补充的是：存在着负常数高斯曲率曲面，它们由连续的、确实具有各阶导数但却仍然非解析的函数所表示；相反地，很可能每个正常数高斯曲率曲面必定是解析曲面。而我们知道正常数高斯曲率曲面与下述变分问题关系最为密切：通过空间中一闭曲线作一曲面，它与通过同一闭曲线的定曲面所包围的体积是给定数而面积最小。

20. 一般边值问题

与前述问题密切相关的一个重要问题，是关于在区域的边界上给定函数值时偏微分方程解的存在性问题。这问题大体上已为施瓦尔兹（H. A. Schwarz）、诺伊曼（C. Neumann）和彭加勒对于位势微分方程的强有力的方法所解决。但是，这些方法一般并不能直接推广到沿边界给出微商值或是给出微商与函数值之间的某种关系的情形。它们也不能直接推广到这种情形，即要求的不是位势曲面，而是比方说极小曲面，或经过一给定的空间曲线或是张开在一给定环面上的正常数高斯曲率曲面。我相信，这些存在性定理将有可能借助于一个一般的原理来得到证明，这原理的实质已由狄里克莱原理所指出。这个一般的原理也许还能使我们解决这样的问题：每个正则变分问题是否总有一个解，假定所给边界条件满足某些假设（例如在这些边界条件中有关的函数连续并有分段的一阶或高阶微商），并且如果必要的话，假定解的概念可适当地被加以推广。

21. 具有给定单值群的线性微分方程存在性的证明

在一个独立变元z的线性微分方程理论方面，我想 指出一个重要的问题，一个很可能黎曼本人曾经考虑过的问题。这问题如下：证明一定存在一个富克斯类型的线性微分方程，具有给定的奇点和单值群。该问题要求生成变元z的n个函数，除去给定的奇点外，它们在整个复z平面上正则。在这些奇点处函数可以变为无穷但阶数有限，并且当z围绕着这些点描画环路时，函数将经受给定的线性代换。通过常数计算，表明这样的微分方程可能存在，但至今还只是对特殊情形得到严格的证明，在这种情形里，给定代换的基本方程的根绝对值皆为1。许莱辛格（L. Schlesinger）在彭加勒的富克斯ζ函数理论的基础上

给出了这一证明。如此处所提问题能用某种一般方法处理，线性微分方程理论显然将越臻完美。

22. 通过自守函数使解析关系单值化

正如彭加勒最先要证明的那样，总可以用一个变量的自守函数使两个变量之间的任一代数关系单值化。这就是说，如果给定了两个变量的任一代数方程，对于这些变量总可以找到两个单变量的单值自守函数，它们的代入使给定的代数方程化为恒等式。将这一基本的定理推广到两个变量间任一解析的非代数的关系，彭加勒对此同样也作过成功的尝试，虽然使用的方法与他在上述特殊问题中所用过的完全不同。但是，通过彭加勒关于两个变量间任一解析关系单值化可能性的证明，还不清楚：是否能够确定解出的函数，使其满足某些附加条件。也就是说，我们还不清楚，是否能够这样来选择新变量的两个单值函数，使当该变量遍历这些函数的正则区域时，已给解析区域中的一切正则点都能被达到和表示出来。相反，由彭加勒的研究，似乎会是这样的情形，即在分支点附近存在着某些其它的、一般说来是无限多个离散的解析区域的例外点，它们只有当新变量趋近于函数的某些极限点时才能被达到。鉴于彭加勒所系统叙述的问题的基本重要性，我认为阐明并克服这一困难是极为必要的。

与这个问题一起，提出了将三个或更多个复变量之间的代数关系或任何其它解析关系单值化的问题——这问题已经知道在许多特殊情形是可解的。关于这问题的解决，最近毕加对两个变量代数函数的研究应该说是值得欢迎的、重要的初步探讨。

23. 变分法的进一步发展

到现在为止，我已经广泛地涉及了尽可能是确定的和特殊

的问题，这样做是基于如下的看法：正是这些确定的和特殊的问题，对我们最有吸引力，并且常常会对科学产生深远的影响。虽然如此，我还是想用一个一般的问题来做结束，也就是说，我想简单地介绍一下在本演讲中已经反复提到过的一个数学分支——这个分支，尽管最近由于外尔斯特拉斯的工作而取得巨大的进展，却并没有受到我认为是应有的评价——我指的是变分法。对这一数学分支之所以缺乏兴趣，一部分原因也许是在于对严格的现代教科书的追求。因此，克内索（Kneser）在新近出版的一本著作中从现代的观点来处理变分法，并且考虑到现代的严格性要求，这就尤其值得赞扬了。

按照最广义的理解，变分法就是函数变分的理论，因此它是作为微积分的必要的扩充而出现的。从这个意义上说，比如彭加勒关于三体问题的研究，就构成变分法的一章，因为彭加勒借助于变分原理从已知轨道推导出具有类似特性的新轨道。

对本演讲开始时关于变分法所作的一般评论，我在这里要补充一点简单的说明。

大家知道，变分法本身最简单的问题是寻求一个变元x的函数y，使得定积分

$$J=\int_a^b F(y_x, y;\ x)dx, \quad y_x=\frac{dy}{dx}$$

与y被x的其它函数代替时所取的值相比达到极小值。

在通常意义下一阶变分的消失$\delta J=0$给出了关于所求函数y的著名的微分方程：

$$(1)\quad \frac{dF_{y_x}}{dx}-F_y=0 \quad \left[F_{y_x}=\frac{\partial F}{\partial y_x},\ F_y=\frac{\partial F}{\partial y}\right]$$

为了更精密地研究出现所求极小值的充分必要条件，我们来考察积分

$$J^*=\int_a^b\{F+(y_x-p)F_p\}dx\ \left[F=F(p,y;x)F_p=\frac{\partial F(p,y;x)}{\partial p}\right]。$$

现在我们问：应该怎样选择x、y的函数p以使积分J^*的值不依赖于积分路径，即不依赖于变元x的函数y的选择。积分J^*有形式

$$J^*=\int_a^b\{A_{y_x}-B\}dx。$$

此处A和B不包含y_x，在新问题所要求的意义下，一阶变分的消失$\delta J^*=0$给出了方程

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}=0,$$

也就是说，我们得到了关于两个变元x，y的函数p的一阶偏微分方程

$$(1^*)\qquad \frac{\partial F_p}{\partial x}+\frac{\partial(pF_p-F)}{\partial y}=0。$$

二阶常微分方程（1）和偏微分方程（1*）有着极为密切的关系。通过以下简单的变换，我们可以立刻清楚地看出这种关系

$$\delta J^*=\int_a^b\{F_y\delta y+F_p\delta p+(\delta y_x-\delta p)F_p+(y_x-p)\delta F_p\}dx$$

$$=\int_a^b\{F_y\delta y+\delta y_xF_p+(y_x-p)\delta F_p\}dx$$

$$=\delta J+\int_a^b(y_x-p)\delta F_pdx。$$

就是说，我们由此可推出以下事实：如果我们构造了二阶常微分方程（1）的任一单（参数）积分曲线簇，然后形成一

个一阶常微分方程

$$(2) \qquad y_x = p(x, y)$$

它也以这些积分曲线为其解，那么函数$p(x,y)$一定是一阶偏微分方程（1*）的一个积分；反之，如果$p(x,y)$表示一阶偏微分方程（1*）的任一解，则一阶常微分方程（2）的所有非奇异积分同时也是二阶微分方程（1）的积分，或者简单地说，如果$y_x = p(x,y)$是二阶微分方程（1）的一个一阶微分方程，则$p(x,y)$就表示偏微分方程（1*）的一个积分并且反之亦然；因而二阶常微分方程的积分曲线同时也就是一阶偏微分方程(1*)的特征。

在上述情形，我们可以通过简单的计算而得到同样的结果；此种计算给问题中的微分方程（1）和（1*）以形式

$$(1) \qquad y_{xx}F_{y_x y_x} + y_x F_{y_x y} + F_{y_x x} - F_y = 0,$$

$$(1^*) \qquad (p_x + pp_y)F_{pp} + pF_{py} + F_{px} - F_y = 0,$$

这里的下标表示对于x、y、p、y_x的偏导数。由此，已经确定的关系的正确性就看得很清楚。

前面所推导而方才被证明的二阶常微分方程（1）和一阶偏微分方程(1*)之间的密切关系，我认为对于变分法具有基本的意义。因为，由积分J^*不依赖于积分路径这一事实，可以得到

$$(3) \qquad \int_a^b \{F(p) + (y_x - p)F_p(p)\}d_x = \int_a^b F(\bar{y}_x)dx$$

假定我们把左边的积分看作是沿任一路径y进行，而右边的积分则是沿着微分方程

$$\bar{y}_x = p(x, \bar{y})$$

的积分曲线而进行。借助于方程（3），我们便得到外尔斯特拉斯公式

$$(4)\quad \int_a^b F(y_x)dx-\int_a^b F(\bar{y}_x)d_x=\int_a^b E(y_x,\ p)dx$$

此处E表示外尔斯特拉斯表达式，它依赖于y_x，p，y，x，

$$E(y_x,\ p)=F(y_x)-F(p)-(y_x-p)F_p(p),$$

所以，由于问题的解只依赖于求出积分$p(x,y)$，它在我们正在考察的积分曲线$\bar{y}$的某个邻域内是单值的和连续的，故上述的研究立即引导到——不必引进二阶变分而只需对微分方程(1)应用配极过程——雅可比条件的表达式，并且能对下述问题给出回答：在怎样的程度上，这雅可比条件与外尔斯特拉斯条件$E>0$一起，成为出现极小值的充分必要条件。

上述研究无需更多的计算就可以过渡到两个或更多个未知函数的情形，并且还可以过渡到重积分或多重积分的情形。这样，例如给定区域w上的重积分

$$J=\int F(z_x,z_y,z;x,y)d\omega\quad\left[z_x=\frac{\partial z}{\partial x},\quad z_y=\frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

在这种情形里一阶变分的消失（按照通常的意义理解）$\delta J=0$给出了熟知的关于x和y的函数z的二阶微分方程

$$(\text{I})\quad \frac{dF_{zx}}{dx}+\frac{dF_{zy}}{dy}-F_z=0,\ \left[zF_{zx}=\frac{\partial F}{\partial z_x},\quad F_{zy}=\frac{\partial F}{\partial z_y},\quad F_z=\frac{\partial F}{\partial z}\right]。$$

另一方面，我们考察积分

$$J^*=\int\{F+(z_x-p)F_0+(z_y-q)F_q\}d\omega$$

$$\left[F=F(p,q,z;x,y),\quad F_p=\frac{\partial F(p,q,z;x,y)}{\partial p},\right.$$

$$\left.F_q=\frac{\partial F(p,q;x,y)}{\partial q}\right],$$

并且问：如何选取x，y，z的函数p与q，使该积分值不依赖于通过给定闭空间曲线的曲面的选择，即不依赖于变元x与y的函数z的选择。

积分J^*有形式

$$J^* = \int\{AZ_x + BZ_y - C\}d\omega,$$

并且在问题的新提法所要求的意义下，一阶变分的消失$\delta J^* = 0$给出了方程

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0。$$

也就是说，我们得出了关于三个变元x，y，z的函数p与q的一阶微分方程

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial(pF_p + qF_q - F)}{\partial z} = 0。$$

如果我们再加上由方程

$$Z_x = p(x,y,z), \quad Z_y = q(x,y,z)$$

得到的偏微分方程

$$(\mathrm{I}^{**}) \qquad p_y + qp_z = q_x + pq_z,$$

那么关于两个变元x，y的函数z的偏微分方程（I）与关于三个变元x，y，z的函数p和q的两个一阶偏微分方程（I*）和（I**）的联立组之间的相互关系，恰好类似于在单积分情形中微分方程（1）和（1*）所有的关系。

由积分J^*不依赖于积分曲面z的选择这一事实，可以得到

$$\int\{F(p,q) + (z_x - p)F_p(p,q) + (z_y - q)F_q(p,q)\}\,d\omega$$

$$= \int F(z_x, z_y)d\omega。$$

假定我们把右边的积分看作是沿偏微分方程

$$z_x = p(x, y, z), \quad z_y = q(x, y, z)$$

的积分曲面z进行的；并且，借助于这一公式我们立刻又可得到公式

$$(5) \quad \int F(z_x, z_y) d\omega - \int F(z_x, z_y) d\omega = \int E(z_x, z_y, p, q) d\omega$$

$$[E(z_x, z_y, p, q) =$$

$$F(z_x, z_y) - F(p, q) - (z_x - p) F_p(p, q) - (z_y - q) F_q(p, q)]。$$

这公式对于重积分变分法所起的作用，与前面给出的单积分情形的公式（4）相同。借助于这个公式，现在我们就能回答这样的问题：在怎样的程度上，雅可比条件与外尔斯特拉斯条件一起，成为出现极小值的充分必要条件。

与这些发展有关，克内索从其它观点出发，以经过修正的形式提出了外尔斯特拉斯理论。外尔斯特拉斯利用经过一定点的方程（1）的积分曲线来导出极值的充分条件，而克内索却使用这种曲线的一个单参数族，并且对于每个这样的族构造出被看作为雅可比—哈密顿方程之推广的偏微分方程的一个解，这个解对于该曲线族来说是一个特征。

附录Ⅱ

希尔伯特科学活动大事年表

1862年

1月23日，希尔伯特出生在靠近东普鲁士首府哥尼斯堡的韦洛。

1869年

希尔伯特进哥尼斯堡皇家腓特烈预科学校初级部学习。

1872年

闵可夫斯基一家搬到哥尼斯堡。后来，希尔伯特和赫尔曼·闵可夫斯基结成终生友谊。

1879年

希尔伯特转到威廉预科学校，这所学校很重视数学和自然科学，对希尔伯特的成才影响很大。

1880年

希尔伯特考入哥尼斯堡大学哲学系，当时数学专业设在哲学系。

1881年

希尔伯特到海德尔堡大学听富克斯的课，留下深刻印象。

1883年

△闵可夫斯基获巴黎科学院数学奖，榜征的题目为：将一个数表成五个平方数的和。

△希尔伯特和闵可夫斯基在哥尼斯堡大学结成朋友。

1884年

△赫尔维茨来到哥尼斯堡大学任副教授职位。希尔伯特、闵

可夫斯基、赫尔维茨三人结成朋友。他们每天下午准五点相会进行“数学散步”。

△希尔伯特在林德曼指导下完成博士论文，题目是关于某些代数形式的不变性质。

△12月11日，希尔伯特通过口试。

1885年

△2月7日，希尔伯特通过学位答辩，获哲学博士学位。

△5月，希尔伯特通过国家预科学校教师资格考试。

△希尔伯特去莱比锡访问克莱因，选听了克莱因的课，参加了一个数学讨论班，受到克莱因器重。

△12月，希尔伯特完成一篇关于不变量的论文，经克莱因提交给科学界。

1886年

△3月，希尔伯特去巴黎访学，和彭加勒结成友谊。

△访问爱米特，留下深刻印象。

△克莱因转到哥廷根大学任教授。

△希尔伯特到哥廷根大学访问克莱因。

△希尔伯特到柏林大学访问克隆尼克，克隆尼克对希尔伯特后来的数学哲学思想产生深刻影响。

△7月，希尔伯特获哥尼斯堡大学讲师资格。

1887年

希尔伯特讲授不变量理论、行列式理论和流体动力学。

1889年

△3月，希尔伯特去爱尔朗根访问果尔丹，了解和熟悉了著名难题“果尔丹问题”的历史，产生了攻克这一难题的想法。

△在柏林，希尔伯特访问了富克斯、赫尔姆霍斯、外尔斯特拉斯和克隆尼克等著名数学家。

△9月，希尔伯特在寄给哥廷根皇家科学会《通讯》的一篇札记中，简要说明了如何解决果尔丹问题的。

△12月，希尔伯特的果尔丹问题证明公开发表，在数学界引起重大反响。

1890年

希尔伯特把关于代数形式的研究成果整理成一篇综述性文章，寄给《数学年鉴》。

1891年

希尔伯特去哈勒听赫尔曼·维纳关于几何基础的报告"论几何学的基础与结构"，受这个报告的启发，他开始萌发形式公理化思想。

1892年

△希尔伯特给出果尔丹问题的一个构造性证明。

△8月，希尔伯特的良师益友赫尔维茨转到瑞士联邦技术学院任教授职位，希尔伯特接任他的副教授职位。

△10月12日，希尔伯特和喀娣结婚。

△希尔伯特的朋友闵可夫斯基到波恩任副教授职位。

1893年

△希尔伯特在不变量理论的一篇论文中声称，他对这一理论的最重要目标已经达到，他开始转向代数数论研究。

△希尔伯特参加慕尼黑的德国数学会年会。经大会提议，请希尔伯特和闵可夫斯基准备一篇数论发展状况的报告。这篇报告后来实际是由希尔伯特一个人完成的。

△希尔伯特接任林德曼的教授职位。

1894年

闵可夫斯基从波恩转到哥尼斯堡大学任副教授职位。

1895年

△3月，经克莱因推荐，希尔伯特到哥廷根大学接任H·韦伯的教授职位，由此开始了他的黄金时代。

△闵可夫斯基接任希尔伯特的教授职位。

△希尔伯特发表“论直线是最短路径”论文。

1896年

△闵可夫斯基去苏黎世任教授职位。

△希尔伯特把“数论报告”的校样寄给闵可夫斯基，请他审阅。

1897年

△希尔伯特的数论报告“代数数域论”定稿，这是一篇具有重大价值的数学杰作。

1898年

△希尔伯特发表重要论文“论相对阿贝尔域理论”。

△希尔伯特讲授几何基础。

△在克莱因倡导下，哥廷根大学筹建高斯和韦伯的纪念碑，这座纪念碑象征着哥廷根的科学传统—数学和物理学的有机结合。

1899年

△希尔伯特的名著《几何基础》一书出版。

△希尔伯特成功地解决狄里克莱原理问题。

1900年

△8月6日，希尔伯特在巴黎国际数学家代表大会上作题为“数学问题”的著名讲演，提出了23个尚待解决的重大而关

键的问题。

△希尔伯特的学生德恩给出希尔伯特第3问题的部分解答，次年完全解决了这个问题。

△希尔伯特发表“论数的概念”一文，提出实数公理化思想。

1902年

△希尔伯特兼任《数学年鉴》主编。

△经克莱因努力，哥廷根大学增设一个教授职位，闵可夫斯基从苏黎世大学调来担任这个职位。

1903年

18岁的赫尔曼·外尔进哥廷根大学学习，成为希尔伯特的“数学儿子”。后来希尔伯特退休时，经希尔伯特提议由外尔接替了他的职位。

1904年

△在克莱因和希尔伯特努力下，哥廷根大学增设一个应用数学教授职位，龙格被调来担任这个职位。

△希尔伯特转向积分方程论研究，在《哥廷根自然科学皇家学会报告》上发表关于积分方程的第一篇论文。到1910年，他在该《报告》连续发表了6篇积分方程论文。

△在海德尔堡国际数学会议上，希尔伯特作“论逻辑及算术”的讲演，提出证明论的初步思想。

1905年

△希尔伯特和闵可夫斯基、玻恩等人研讨电动力学问题。

△希尔伯特发表关于微分方程积分解的论文。

1908年

希尔伯特给出华林定理的一个证明。

1909年

△在希尔伯特指导下，柯朗完成有关狄里克莱原理应用的博士论文。

△1月12日，闵可夫斯基因阑尾炎穿孔去世。

△希尔伯特在华林定理的证明文章作了题赠：为了纪念赫尔曼·闵可夫斯基。

△32岁的兰道接任闵可夫斯基职位。

1910年

△2月，柯朗获博士学位，成为希尔伯特的助手。

△4月，希尔伯特邀请彭加勒来哥廷根大学讲学，内容是积分方程和相对论。

△5月1日，希尔伯特在哥廷根科学会发表纪念闵可夫斯基的演说。

△希尔伯特邀请物理学家洛伦兹来哥廷根讲授相对论和辐射理论。

△希尔伯特在《哥廷根自然科学皇家学会报告》上发表最后一篇关于积分方程的论文，他的注意力开始转向物理学。

△希尔伯特获鲍耶数学奖，彭加勒任评奖委员会秘书，起草介绍希尔伯特工作的报告。

1911年

彭加勒评述希尔伯特工作的报告发表在《数学年鉴》上。

1912年

△物理学家索末菲推荐他的学生保尔·爱瓦尔德任希尔伯特的物理助手。

△5月，希尔伯特邀请索末菲来哥廷根大学讲学，介绍物理学的新进展。

△希尔伯特为没有预科学校文凭的犹太旁听生雅可布·格罗美争取到博士学位。

1913年

△希尔伯特被选为柏林科学院通讯院士。

△希尔伯特主持召开为期一周的乌斯克会议，讨论物质运动理论。

1914年

△德国政府发表《告文明世界书》，为其发动战争辩护，许多著名科学家在《告文明世界书》上签名，希尔伯特拒绝签名。

△希尔伯特和物理学家彼得·德拜组织一个关于物质结构的讨论班。

1915年

11月20日，希尔伯特向哥廷根皇家协会提出关于“物理学基础”的第一份注记，提出用一种方法把引力场和电动力学统一起来。

1916年

△艾米·诺德到哥廷根求职，希尔伯特以他的名义开设讨论班，实际上由诺德主讲。

△希尔伯特转向数学基础问题研究。

1917年

△7月，希尔伯特访问苏黎世，邀请保尔·贝尔纳斯来哥廷根作他的助手。

△9月，希尔伯特再次访问苏黎世，在瑞士数学会作“公理化思维”的演说，提出证明论思想。

1919年

△希尔伯特力排众难，为艾米·诺德争取到讲师职位。

△11月8日，赫尔维茨因病去世，希尔伯特在哥廷根科学会发表悼词，追念自己青年时代的朋友。

1920年

△希尔伯特和克莱因把柯朗从蒙斯特大学调来哥廷根大学，准备接替克莱因工作。

△希尔伯特对原子物理方面的问题表现出极大兴趣。

1921年

希尔伯特邀请尼尔斯·玻尔来哥廷根大学介绍物理学新成果。

1922年

△1月23日，希尔伯特60岁生日，德国《自然科学》杂志出版纪念专辑。克莱因赠送希尔伯特一件礼物：希尔伯特1885年在莱比锡克莱因数学讨论班上报告的手抄本。

△希尔伯特发表《数学的新基础：第一篇》，阐述了他处理数学基础问题的基本思想。

△在莱比锡德国自然科学家大会上，希尔伯特作题为“数学的逻辑基础”的讲演，使证明论思想发展到更高阶段。

△在希尔伯特的争取下，艾米·诺德获副教授职位。

△索末菲推荐洛塔·诺德海姆担任希尔伯特物理助手。

△希尔伯特向在苏黎世任教的外尔发出邀请，希望他能回哥廷根工作。

1924年

△柯朗出版《数学物理方法》第一卷（第二卷于1937年出版），把希尔伯特的名字与自己的名字并列在封面上，以表示他的思想来自希尔伯特的影响。

△爱瓦尔德在为《自然科学》写的《数学物理方法》书评中指出：“全书闪耀着希尔伯特精神的光芒——热烈地追求简单明确的真理，把繁多芜杂的东西抛到一边，并以无比清晰的巨匠手法阐明认识要点之间的相互联系——这种基本的精神，以巨大的科学热情熏陶了整整几个世代的研究者。”

1925年

△诺伯特·维纳来哥廷根大学访学，拜访了希尔伯特和克莱因。维纳后来成为控制论的创立者。

△21岁的冯·诺伊曼成为希尔伯特的朋友。

△在明斯特纪念外尔斯特拉斯的会议上，希尔伯特作“论无限”的讲演。

△克莱因去世，柯朗继任克莱因的工作。遵照克莱因遗愿，柯朗积极筹建哥廷根数学研究所。

△秋季，希尔伯特确诊患有恶性贫血，他对自己的健康一直持乐观态度，坚持科学研究工作。

1926年

△希尔伯特高度赞誉康托尔的无穷集合论是“数学思想的最惊人的产物”。

△希尔伯特和诺德海姆合作发表论文“量子力学基础”。

1927年

△欧仁·魏格纳接任希尔伯特的物理助手职位。

△希尔伯特恢复健康，他到汉堡访问，在讲演中重申自己的证明论计划。

△希尔伯特发表《数学基础》。

1928年

△希尔伯特被选为英国皇家学会会员。

△希尔伯特发表《理论逻辑纲要》（与阿克曼合著）。

△希尔伯特不顾比勃巴赫等民族主义者的反对，率领一个由67名数学家组成的代表团赴波隆那出席国际数学会议，在会上作了题为“数学基础问题”的讲演，再次阐明了他的证明论思想。

1929年

△哥廷根数学研究所新楼建成，研究所由柯朗主持工作。

△哥德尔研读希尔伯特的《理论逻辑纲要》，受该书启发完成博士论文，该论文修改稿以题目“关于逻辑函数演算的完备性”发表在1930年的《数学及物理月刊》上。

1930年

△68岁的希尔伯特退休，哥廷根的一条街被命名为希尔伯特大街。

△由希尔伯特提名，外尔从苏黎世来到哥廷根接任希尔伯特的工作。

△哥尼斯堡市政会授予希尔伯特“荣誉市民”称号。

△在哥尼斯堡大会上，希尔伯特发表“逻辑及对自然的认识”的演说。

△哥德尔参加哥尼斯堡会议，在会议上宣读了不完全性定理方面的研究成果。

1931年

△希尔伯特发表《排中律的证明》。

△哥德在《数学及物理月刊》发表论文“论数学原理和有关系统Ⅰ的形式不可判定命题”，此文的发表，意味着希尔

伯特纲领的破产。

1932年

△《希尔伯特全集》第一卷出版。

△希尔伯特70寿辰。外尔写了生日祝词，发表在《自然科学》上。

1933年

△德国法西斯掀起排犹运动，艾米·诺德和外尔被迫移居美国。

1934年

△贝尔纳斯受迫害，去苏黎世避难。

△柯朗受迫害，全家移居美国。

△希尔伯特发表《数学基础Ⅰ》（与贝尔纳斯合著）。

1935年

《希尔伯特全集》最后一卷出版，里面附有布鲁门萨尔为希尔伯特写的传记。

1936年

在奥斯陆召开国际数学会议，希尔伯特没有参加大会，代表们给他拍了问候电，柯朗在大会期间和希尔伯特通了电话。

1939年

△希尔伯特发表《数学基础Ⅱ》（与贝尔纳斯合著）。

△瑞典科学院将首次米塔格—莱福勒奖授予希尔伯特。

△希尔伯特的最后一名助手、年轻的数理逻辑学家杰哈德·甘岑被纳粹逮捕，死于1945年。

1942年

△柏林科学院为纪念希尔伯特80寿辰，决定给希尔伯特的

《几何基础》一书以特殊的荣誉。

△希尔伯特跌倒在大街上，摔伤了胳膊。

1943年

2月14日，希尔伯特去世，著名物理学家索末菲从慕尼黑专程赶来参加葬礼，讲述了希尔伯特光辉的一生。

参 考 文 献

〔1〕大卫·希尔伯特：《几何基础》（上册），科学出版社1987年。

〔2〕希尔伯特、阿克曼：《数理逻辑基础》，科学出版社1958年。

〔3〕大卫·希尔伯特："数学问题"，《数学史译文集》，上海科学技术出版社1981年。

〔4〕赫尔曼·外尔："大卫·希尔伯特及其数学工作"，《数学史译文集》，上海科学技术出版社1981年。

〔5〕P·贝尔纳斯："希尔伯特"，《数学哲学译文集》，知识出版社1986年。

〔6〕H·富鲁敦萨尔："希尔伯特"，《科学与哲学》1980年第1—2辑。

〔7〕M·托培尔："希尔伯特'几何基础'的来源"，《数学史译丛》1988年第1期。

〔8〕康斯坦西·瑞德：《希尔伯特》，上海科学技术出版社1982年。

〔9〕胡作玄："现代数学的巨人——纪念希尔伯特诞生120周年"，《自然辩证法通讯》1982年2期。

〔10〕徐利治：《数学方法论选讲》，华中工学院出版社1983年。

〔11〕胡作玄：《第三次数学危机》，四川人民出版社1985年。

〔12〕张家龙：《公理学、元数学与哲学》，上海人民出版社

1983年。
〔13〕朱水林：《形式化：现代逻辑的发展》，人民出版社1987年。
〔14〕夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》,人民出版社1986年。
〔15〕郑毓信、林曾：《数学·逻辑与哲学》，湖北人民出版社1987年。
〔16〕张奠基、赵斌：《二十世纪数学史话》，知识出版社1983年。
〔17〕M·克莱因：《古今数学思想》（第四册），上海科学技术出版社1981年。
〔18〕王前：《数学哲学引论》，辽宁教育出版社1991年。
〔19〕B·A·卡尔普宁：《自然科学和技术科学的方法论基础》，华南师院哲学社会科学研究所1982年。
〔20〕解恩泽、赵树智：《数学思想方法纵横论》，科学出版社1987年。
〔21〕赵树智："反常思路的成功"，《潜科学》1987年1—2期。
〔22〕赵树智："希尔伯特数学研究方法的特色"，《长春师院学报》（自然科学版）1985年第2期。
〔23〕赵树智："狄里克莱原理的沉浮"，《潜科学杂志》1985年2期。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝希尔伯特的科学精神
作者＝赵树智著
页数＝２４２
ＳＳ号＝１００９２２２７
出版日期＝